

数学の基礎 1 集合論・初級編 0

学習を始める前に

東北大学データ駆動科学・AI 教育研究センター

最終更新: 2025 年 9 月 26 日

このコンテンツは東北大学データ駆動科学・AI 教育研究センターが運営する OpenCourseWare での公開を前提として作成されています。

本コンテンツはクリエイティブ・コモンズ・ライセンス CC BY-NC-SA 4.0 の下で公開します。



CONTENTS

1	「数学の基礎 1 集合論・初級編」の概要	1
1.1	各巻の概要—何を学ぶのか	1
1.2	想定する読者像と必要な予備知識	3
1.3	その他の細かいこと	4
2	参考文献	5

1 「数学の基礎 1 集合論・初級編」の概要

この「数学の基礎 1 集合論・初級編」シリーズの各巻は、東北大学データ駆動科学・AI 教育研究センターが運営する OpenCourseWare (OCW) での公開を想定して作成されたコンテンツであり、その名前通り集合論 (素朴集合論) の中の基本的な事項を取り扱っている。^{*1} なお、本コンテンツのステータスは常に「作成途中」であり、間違いの修正や項目の追加・削除などが随時行われる可能性があることをお断りしておく。

1.1 各巻の概要—何を学ぶのか

集合とは読んで字の如く「物の集まり」のことである。数が集まれば集合ができるし、平面上の点やベクトルが集まっても集合ができる。ちょっとややこしいが、関数が集まっても集合ができるし、集合が集まっても集合ができる。

集合とはつまるところ何かの集団であるという、ただそれだけのシンプルで地味な概念であるが、現在ではこれが数学的な話を読み書きするための、言わば**公用語**の役割を果たしている。言語の運用には論理がつきものだが、論理ももちろん集合と共に数学の公用語の中に織り込まれている。それらの影響は数学だけにとどまらず、情報科学や自然科学、あるいはそれらを活用した技術的分野など、数学に隣接する分野にまで広がっている。

^{*1} 本シリーズのコンテンツは、東北大学工学部の専門科目「情報数学」の授業内容に関する資料をもとに、加筆修正などを施して編集されたものである。ただし、本シリーズ自体は特定の授業科目を想定したものではないし、理工系学生のみ限定されたものではない。

本シリーズのスコープは、これから先に数学あるいはそれに近隣する様々な分野を学習していくために共通して必要となる集合論の基本的な内容である。少なくとも序盤では、多くの内容は高校数学で学ぶことも重複していることもあって、高校数学の学習経験があれば大きな困難を感じることはあまりないと思う。しかし、後半では高校数学では馴染みのない概念が出てきたり、特に無限に関わるやや難解な概念が出てきたりするなど、高校数学からスムーズに接続できるとはちょっと言い難い内容も登場する。さらに本シリーズでは、命題や定理など数学的事実は、なるべく証明も省略せずに説明している。高校数学まででは、証明が意識されることは必ずしも多くなかったかも知れないが、数学的議論のサンプル・練習題材を提供するという狙いもあって、定義の正しい理解とそれに基づく証明を重視する立場をとった。

そのようなわけで、本シリーズは集合論への‘入門編’と言うにはやや高度な内容も含んでおり、定理の証明など‘堅苦しい’部分も多いが、数学を学んでいくための基礎となる内容のみで構成されているので(「入門編」の次という感じで)「初級編」を名乗っている。各巻の概要は次の通りである。

- 第1巻『集合と論理』

素朴集合論の流儀に従いつつ、集合とそれに付随する基本概念(部分集合や空集合など)、集合の演算(和集合、共通部分、差集合と補集合、直積集合など)について学習する。集合は確かに数学的内容を記述するための公用語の役割を果たすが、言語を適切に運用するスキルとして論理(命題論理および述語論理)に関する基本的な理解も欠かせないので、数学で用いられる論理の基本についても集合と関連させつつ学習する。なお、本巻では形式化された数理論理的な解説は意図していない。

- 第2巻『写像』

数学では、何か理論の対象物(オブジェクト)があれば、そのオブジェクト自身だけではなく、それらを結ぶ関係性についても興味の対象となる。写像はまさに2つの集合の間の関係性を記述するもので、高校数学でも現れる関数の概念を一般化したものである。(ただし、本シリーズでは写像と関数を明確に区別せず同じ意味の用語として扱っている。)本巻では、写像に関する基本概念——像と原像、単射と全射、逆写像など——を学ぶが、これらは数学のどの分野でも用いられる概念であり、集合と並んで数学全体の公用語になっている。また、本巻では数学において無限を扱うときにしばしば陽に暗に用いられる選択公理についても簡単に触れる。

- 第3巻『同値関係』

関係(詳しくは、二項関係)は写像をさらに一般化した概念であり、2つのオブジェクトが与えられたとき、それらに対して「成り立つ」「成り立たない」と判定が下る基準のことである。高校数学までも、数の大小関係、整数の整除関係(約数・倍数の関係)、図形の合同関係や相似関係などいくつもの‘関係’が登場している。本シリーズでは、数学で最もよく現れ重要度が高い関係として同値関係と順序関係を扱うが、本巻ではまず関係論の初歩から始めて、同値関係までを取り扱う。同値関係は、図形の合同関係や相似関係がそのいい例であるが、「細かい違いを無視すれば‘仲間’と見なせる」という意味を表す関係である。細かい違いを敢えて無視することで、大切なものが見えてくる——現実世界ではよくあることだが、数学でもそれは同じであり、同値関係が活躍する場面はかなりたくさんある。

- 第4巻『順序関係』

本巻では順序関係を取り扱う。これは文字通り、何らかの意味での‘大小関係’を定めるものである。多数のオブジェクトを処理するとき、何らかの基準に従ってそれらを順番に並べてから処理していった方が効率的でミスが少ないということは現実世界でもよくあることだが、数学でも集合上に何らかの順序を導入して集合に一種の‘構造’を与えることで物事を整理しやすくなることがよくある。本巻では、順序にまつわる基本用語とそれらの使い方を覚えることが主な内容である。また、本巻で扱

われる整列集合は選択公理や数学的帰納法とも関係が深いと同時に、次巻で扱われる順序数を論じる基礎にもなる重要な概念である。

● 第5巻『集合の濃度と順序数』

無限集合とは文字通り無限個のメンバーで構成される集合のことであるが、実は一口に「無限」と言っても、それこそ無限通りの無限度がある。例えば、 \mathbb{Q} (有理数の全体集合) と \mathbb{R} (実数の全体集合) はどちらも無限集合だが、 \mathbb{R} は \mathbb{Q} よりも圧倒的に無限度が高い。本巻では、このように無限集合の無限度合いを比較する考え方や、無限集合の元の個数を数えるための基本的な考え方について学ぶ。有限世界の常識から見れば‘非常識’なことが平気で起こる世界について学ぶことになるので、戸惑いはあるかも知れないが、同時に興味深い世界でもあると思う。そして、自然数には物の個数を数えるという機能の他に、順番を数える序数の機能もある。本巻では、自然数が持つ序数の機能を一般化した順序数の概念についても簡単に解説する。

本シリーズでは、「集合とは物の集まりである」という素朴な理解から始まる**素朴集合論**の立場をとっている。集合論にも、公理的基盤に基づく**公理的集合論**があるが、本シリーズでは公理的な方法で集合論を展開することは意図していない。また、数学やその近隣分野で現在広く流通している公用語と言えば、圏論(カテゴリー論)も重要ではあるが、本シリーズでは圏論的なトピックスを扱う余裕はなく、それらの話題には触れていない。^{*2}

1.2 想定する読者像と必要な予備知識

本シリーズの読者像としては、次の予備知識を持っていて、**集合論をじっくり学びたいという意欲のある人**(学生・社会人、専門分野を問わず)を想定している。いずれの項目も、高等学校の教科書水準程度の基本が理解できていれば、学習を始めるには十分である。

- 高等学校「数学 I」で扱われる集合論に相当する学習内容に関する知識
集合、部分集合、和集合、共通部分、補集合などの言葉の意味や、それらを表す記号を知っていること。
- 論理の基本
「P かつ Q」「P または Q」「P ならば Q」「全ての～について」「～が存在する」などの文章の意味を正しく解釈できること。特に、否定に関わるド・モルガンの法則を正しく使えること、そして条件命題に対する「逆」「対偶」「必要条件」「十分条件」などの意味を理解していること。

これらはどちらも本編の中で解説されることなので、正確には予備知識として持っている必要はないのかも知れない。しかし、実際には高校数学での学習経験がある方がはるかにスムーズに進めると思う。後は、**文章を書かれている通りに正確に理解する読解力と注意力**があればスタートを切ることができる。

各巻の本文中に演習問題を散りばめてある。それらの目的はいろいろあって、例えば本文中に提示された定理や命題の証明を完成させることであったり、具体例や反例を考えることであったり、本文中で示された数学的事実を実際に使ってみる体験をすることであったりする。全てとは言わないが、大部分の問題はその周辺で解説されていることを踏まえれば解決できるはずなので、巻末付録にある解答例を見る前にまず自分で考えてみることをお勧めする。

本シリーズは集合論をじっくり学びたい人のために作成されているので、「細かいことや難しいことには

^{*2} ただし、それとなく圏論的なものの見方に触れている箇所は若干ある。

立ち入らず概要だけをざっくりと知りたい」というニーズには不向きだと思われる。もちろん、数学的事実の証明や演習問題、比較的難度が高いと思われる内容を全てスキップして読むという「省エネ」な読み方もある程度は可能なので、それで自分のニーズを満たすことができるのであれば、そのような読み方でもいいと思う。特に、後で精読するつもりでも、その前にざっと概要を理解したいという場合には、そのような「省エネ」的な読み方が有効だろう。

本シリーズは厳格な数学書であることを意図してはいないが、数学的な文章には違いない。じっくりと精読したい場合には、次の文献が参考になるだろう：

- 竹山美宏『数学書の読みかた』森北出版, ISBN 978-4627082816, 2022.

数学的な内容について説明されている書籍はもちろんたくさんあるが、数学書の読み方 (数学書を使って自習する方法) を丁寧に解説してある本はそれほど多くはない。数学を専攻する学生はもちろんのこと、それ以外の学生であっても、数学をじっくり学びたい人にとっては参考になると思う。

1.3 その他の細かいこと

本文中では、英文アルファベットの他にもギリシャ文字を使用する。円周率を表す π (パイ) や総和記号に使われる Σ (シグマ)、あるいは α (アルファ) 線, β (アルファ) 線, γ (ガンマ) 線など物理学方面の用語にも使われる有名なギリシャ文字もあるが、高校数学までではあまり馴染みのないギリシャ文字もある。念のため、ギリシャ文字の一覧を表に書いておく。(これらの文字を実際に全部使うというわけではない。)

なお、細かい約束事だが、本シリーズでは自然数の全体を $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ で表し、ここに 0 は含まないことにしている。^{*3} 0 および自然数の全体を $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ で表記する。

文字	読み方	文字	読み方
α, A	アルファ	ν, N	ニュー
β, B	ベータ	ξ, Ξ	グザイ
γ, Γ	ガンマ	\omicron, O	オミクロン
δ, Δ	デルタ	π, Π	パイ
$\epsilon (\varepsilon), E$	イプシロン	ρ, P	ロー
ζ, Z	ゼータ	σ, Σ	シグマ
η, H	イータ	τ, T	タウ
θ, Θ	シータ	υ, Υ	ウプシロン
ι, I	イオタ	$\phi (\varphi), \Phi$	ファイ
κ, K	カッパ	χ, X	カイ
λ, Λ	ラムダ	ψ, Ψ	プサイ
μ, M	ミュー	ω, Ω	オメガ

^{*3} 自然数に 0 を含まないという約束は、現在の日本の中等教育での流儀・慣習を踏襲しただけである。自然数に 0 を含める流儀もあるし、分野によってはその方が合理的なことすらある。

2 参考文献

本シリーズの各巻を作成するにあたって参考にした文献や、自学自習のための参考になると思われる文献を和書・洋書を問わず挙げておく。もちろん、これらの本を全て買い揃えようなどと思わなくてもいいが、これらの中から気に入った一冊が見つければ、購入して学習してみるのもいいだろう。

なお、素朴集合論を扱っている書籍には位相空間論がセットになっているものも多く、「集合と位相」のようなタイトルの書籍がたくさんある。位相空間論は本シリーズのスコープから外れているが、位相空間論の用語も現代数学では幅広く公用語として用いられているので、後学のために位相空間論がセットになっている書籍も選択肢の一つに入れておいていいと思う。

- [1] 松坂和夫『集合・位相入門』(数学入門シリーズ 1 新装版), 岩波書店, ISBN 978-4000298711, 2018.
- [2] 齋藤正彦『数学の基礎: 集合・数・位相』(基礎数学 14), 東京大学出版会, ISBN 978-4130629096, 2002.
- [3] 田中一之, 鈴木登志雄, 『数学のロジックと集合論』 培風館, ISBN 978-4563003371, 2003.
- [4] 渡辺治, 北野晃朗, 木村泰紀, 谷口雅治『数学の言葉と論理』(現代基礎数学 1), 朝倉書店, ISBN 978-4-254-11751-6, 2008.
- [5] 嘉田勝, 『論理と集合から始める数学の基礎』 日本評論社, ISBN 978-4535784727, 2008.
- [6] 志賀浩二, 『集合への 30 講』(数学 30 講シリーズ 3 新装版), 朝倉書店, ISBN 978-4254118834, 2024.
- [7] A. Shen, N. K. Vereshchagin, *Basic Set Theory*, Student Mathematical Library 17, American Mathematical Society, ISBN 978-0821827314, 2002.
- [8] Daniel W. Cunningham, *Set Theory A First Course*, Cambridge University Press, ISBN 978-1-107-12032-7, 2016.
- [9] Paul R. Halmos, *Naive Set Theory* (Undergraduate Texts in Mathematics), Springer, ISBN 978-0387901046, 2014.