数学の基礎 1　集合論・初級編 1

集合と論理

東北大学データ駆動科学・AI 教育研究センター

最終更新: 2025 年 9 月 26 日

この巻で学習することの概要

集合は数学的な議論を記述するための言わば公用語の役割を果たしている．本巻では, 数学的な文章を読み解くために必要不可欠な集合に関する基本概念および記号類を覚えることが一つの目的である．それと同時に, 思考を正しく運用するためのスキルも必要であるが, それが論理である．数学で最も普通に使われているのは古典論理と言われるものだが, 集合と古典論理は互いに関係しあっているので, 本巻では両者の関係を意識しつつ, 古典論理に関する基礎知識についても学習する．高校数学とも重複する話題が多く, 論理に関しても日常的・常識的な感覚で理解できる部分がかなり多いが, それなりに注意すべき点もあるので, そのようなポイントを重点的に押さえておこう．

Keywords　集合, 部分集合, 空集合, 和集合, 共通部分, 差集合と補集合, 対称差, 直積集合, 論理積と論理和, 論理否定, 論理包含, 空虚な真, 必要条件と十分条件, 全称と存在, de Morgan 則

予備知識　高校数学「数学 I」で扱われる集合論に相当する内容の学習経験があることが望ましい.

Contents

1 論理の基礎・前編

論理とは既に私たちの耳に馴染んだ言葉だが, 改めて論理とは何かを説明しようとすると意外と難しい. そこで, 某有名国語辞書を見てみると, 論理とは「考えや議論などを進めていく筋道. 思考や論証の組み立て. 思考の妥当性が保証される法則や形式」と説明されている. つまり, 論理とは, 何らかの主張が正しい・正しくないというときに, その妥当性を確立したり説明したりする際に用いられる思考様式のことだと思えばいいだろう.

私たちは, 日常生活の中でも意識的あるいは無意識的に論理を使いこなしている. 例えば,「後は数学または物理の試験に合格すれば進級できる」という状況では, 少なくともどちらかには合格できるように頑張るだろうし, 実際に数学あるいは物理に合格したのに「あなたは落第です」と言われたら怒るに違いない.「雨が降れば明日の遠足は中止」と決まっているとき, 次の日に無事遠足に行けたと聞けば, 少なくとも遠足が中止になるほどの雨は降らなかったんだなと分かる. こういった何気ない日常的な場面でも, 論理が働いている. 人間は常に論理的だというわけではないし, 間違うことも多いが, 私たちが自然だと感じる思考の様式にはある程度の法則性があることは確かだろう.

本巻で扱う論理は**古典論理**と呼ばれるものにあたる. これは, 言わば最も単純化された論理体系であり, 数学の '日常生活' で最も普通に使われる論理体系である.[*1] 数学の世界で働いている論理は大胆に単純化, 形式化されているという特徴はあるが, 私たちが自然に持っている論理とそれほど大きくかけ離れてはい

[*1] 数学の中には論理そのもの (あるいは, もっと言えば数学そのもの) を研究対象とする分野もあり, そのような分野では当然ながら古典論理が前提になっているとは限らない.

ない.

本巻では, **数学の日常生活に困らない程度に古典論理を使いこなす**ための基本的な事項を中心に学ぶ. 数理論理学的に整理された理論の解説は意図しておらず, 例えば「命題」や「証明」などという基本的な用語についてもごく素朴な理解の下で話を進める. なので, 大部分の話は日常言語的な感覚で理解できると思う. とはいえ, **数学の論理と日常語の論理は全く同じというわけではない**. 注意を要するポイントもいくつかあるので, そのようなところを重点的におさえておきたい.

1.1　命題と真理値

命題とは, **真**または**偽**のどちらか一方の**真理値**を持つ主張のことである. 真は正しい, 同じく偽は正しくないという意味である. 例えば, 次の文言は全て真の命題として知られている.

(1) $\sqrt{2}$ は無理数である.

(2) 2 以上の全ての自然数は唯一通りの素因数分解を持つ.

(3) 有界閉区間 $[a,b]$ 上で連続な実数値関数 f に対して, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が存在する.

もちろん, これらの命題が意味を持つためには,「無理数」「自然数」「素因数分解」「有界閉区間」「連続関数」「定積分」などの諸概念が前もって整備されていることが前提である.

命題が真と判断されるためには, その根拠が提示されて妥当であると認められる必要があるが, 数学ではそれは**証明**という形で記述される. 正しさの根拠が要求されること自体は数学に限った話ではないが, 数学では良くも悪くも証明の論理的な厳密さが高度かつ細やかに要求されることが特徴である.

次の文言はいずれも**偽の命題**である.

(4) a, b が共に無理数ならば, ab も無理数である.
$a = b = \sqrt{2}$ のとき, これらは無理数であるが, $ab = 2$ は有理数である.

(5) n が自然数ならば, $2^{2^n}+1$ は素数である.*2
$n = 5$ のときに $2^{2^5}+1 = 641 \times 6700417$ と分解される.

このように, 命題が偽であることを示すには, **前提条件を満たしているのに結論が伴わない事例**を提示すれば十分である. このように, 主張を覆す事例を**反例**と言う.

次の文言は, 真偽どちらか一方に落ち着くはずの命題ではあるが, 真偽が未だによくわかっていない.

(6) 4 以上の偶数は全て, 2 つの素数の和で表すことができる. (同じ素数を 2 つ使ってもよい.)
これは **Goldbach 予想**という整数論の未解決問題である. 計算機を使用した実験から正しそうだとは思われているが, 未だ証明も反例も知られていない.

(7) $\pi + e$ は有理数である.
$\pi = 3.14159\cdots$ は円周率, $e = 2.71828\cdots$ は Napier 数と呼ばれる実数であり, 共に数学で最も重要な定数の一つである. 両者ともに無理数であることは既に分かっているが, $\pi + e$ が有理数か無理数かは未だに分かっていない.

*2 この形の自然数 $2^{2^n}+1$ は Pierre de Fermat に因んで **Fermat 数**と呼ばれている. Fermat は全ての Fermat 数は素数であると予想したが, Leonhard Euler が因数分解 $2^{2^5}+1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ を発見してその予想は誤りであることが分かった. もちろん, 現代のようなコンピュータがない時代の話である.

☕ Coffee Break ☕

定義・定理・命題

数学の本を読んでいると,「定理」「命題」「補題」「系」などというタイトルが書いてあるのをよく見かける. これらは全て何らかの数学的な内容を主張している命題である. (そして, 普通は数学書には '真' の命題のみが載っている. もっとも, 注意喚起や対比のために偽の主張が敢えて載せてあることもあるが.) これらの言葉の使い分けは, 厳密な約束があるわけではないが, 概ね次の通りである.

- **定理**は, その節や段落においてメインとなる命題や, 最も重要な事実としての命題を指す. 歴史的に有名な事実や, その分野で特に重要な事実を「〜の定理」と呼ぶことも一般的である.
- **命題**は, ごく一般的な意味で数学的な主張を指す.
- **補題**は, 他の定理や命題を証明する際に用意される補助的な命題である. ただし, いろんなところで幅広く応用される命題も「〜の補題」と呼ばれることがある.
- **系**は, 他の定理や命題から比較的容易に副産物として導かれる命題である.

定義は一つの約束ごとなので, 真偽を論じるという対象ではない. ただし,「その定義に意味はあるのか?」「なぜそのような定義を置くのか?」という疑問の対象にはなり得る. **公理**は理論の出発点に置かれる土台的な前提を指すが, その理論の最も基本的な対象を定義づける条件も「公理」と呼ばれることがある. 例えば, ベクトル空間の定義のことを「ベクトル空間の公理」と呼ぶというように.

これら 2 つの例が示すように, 命題の真理値は真か偽のどちらかだとは言え, その真偽が簡単に分かるかどうかはまた別問題である.

次の文言は, 真偽の判断基準がはっきりしない, 主張の内容が曖昧であるなどの理由から, 数学では命題として扱えない主張である:

(8) $\sqrt{2}$ は 1.41 に近い値である.
これは日常語の感覚では概ね真ではあるが,「近い」ことの定義が明確でない限り, 真偽のはっきりしないグレーな主張である. 例えば, $|x-y|<0.01$ のときに x, y は「近い」と定義すれば真であるが,「近い」ことの定義が $|x-y|<0.001$ であれば偽である.

(9) 松島の景色は美しい.
松島は日本三景の一つで, 確かにその景色は美しい. どれだけ同意する人が多かろうが, だからといって多数決で真となるわけではない.「松島の景色」や「美しい」の定義が明確でない限り, 単に個人の主観の問題である.

(10) お酒の飲み過ぎはよくない.
確かにその通りで, 身に滲みる. 生活の命題としては真だろう. それで十分じゃないか.

このように, 日常語の世界では真偽があやふやなグレーゾーンが存在する. それは必ずしも悪いことではなく, 日常語の感覚を豊かにするものとさえ言えるが, 数学ではそのようなグレーゾーンを極力排除することで世界を大胆に単純化している. このような大胆な単純化なしには, 数学が持つ高い厳密性を要求することは不可能だろう. **数学は世界を大胆に単純化して見ている**ということを, 頭の片隅に置いておこう.

1.2　論理積と論理和

以下, 立体の T は真 (True), F は偽 (False) を各々表す記号とする. 1 と 0 がそれぞれ真, 偽の意味で用いられることもよくある.

2 つの命題 p, q の真偽が一致することを $p = q$ と書きたいところではあるが, これだと p と q が同じ命題だと主張しているように見える. ここでは, どうせ命題についてはその真偽にしか興味がないのでそれでも大きな問題は起こらないだろうが, やはり「2 つの命題が等しいとはどういうことか」を明確に定義しないで等号表記を使うのはちょっと気持ちが悪い. ということで, ここでは p と q の真偽が一致することを $p \equiv q$ と書くことにする.

「p かつ q である」を $p \wedge q$ と書いて, p と q の**論理積**と呼ぶ. また,「p または q である」を $p \vee q$ と書いて, p と q の**論理和**と呼ぶ. それらの正式な定義は表 1 の通りである. これはほぼ日常語の感覚通りだが, 注意点もある. 表の通り, **$p \vee q$ は p と q が共に真である場合も真である**と定められている. 表の最右列 $p \veebar q$ は厳格な二者択一「p または q のうち**ちょうど一方**が成り立つ」を表している. $p \veebar q$ を**排他的論理和**と言う.[*3] 論理和と排他的論理和の違いは些細ではあるが重要なので, 両者をしっかり区別しておこう.

表 1　論理積 $\wedge$, 論理和 $\vee$ および排他的論理和 $\veebar$ の真理値表. 太赤字部分に注意.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$
F	F	F	F	F
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	**T**	**F**

補足 1.1　日常語の「または」には論理和と排他的論理和の両方の意味がある.「定食にコーヒーまたは紅茶が付きます」という場合, 普通はどちらか一方しか付かないが, それは排他的論理和の意味である.「広島か中日が負ければ阪神が優勝する」という場合, 広島と中日の両方が負けても阪神が優勝するから, これは論理和の意味である. **数学で単に「または」と言えば, 排他的論理和ではなくて, もっぱら論理和の意味である.** □

命題 1.2. 任意の命題 p, q, r について,

(1) **交換則**: $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$.
(2) **結合則**: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$, $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.
(3) **吸収則**: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$, $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.
(4) **冪等則**: $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$.
(5) **分配則**: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

交換則から冪等則までは, $\wedge$ と $\vee$ の意味からも至極自然である. (いちいち丸暗記するまでもない.) ここでは代表として, 分配則 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を確かめよう. 最も素直な方法は, p, q, r の真偽に応じて $2^3 = 8$ 通りの組み合わせを全て考えて, **真理値表**を地道に作成することである (→表 2). 例えば, 2 行目は「p と q が偽で r が真であるときは, $q \vee r$ は真であり, $p \wedge (q \vee r)$ から $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ までは全て

[*3] 排他的論理和には, $p \veebar q$ の他にも $p \oplus q$ など他の記法が用いられることもある.

偽である」という意味である．この表を完成させ，最終的に $p \wedge (q \vee r)$ の列と $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ の列に書かれた真理値が全て一致することを確かめればよい．表を完成させることは演習問題とする (→演習 1.1)．他の規則についても，もちろん同様にして真理値表を地道に作成すれば確認できる．

表 2　分配則 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を真理値表で確認する (→演習 1.1).

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	T	F					
F	T	T					
T	F	F					
T	F	T					
T	T	F					
T	T	T					

▶ **演習 1.1**　表 2 を完成させよ．

補足 1.3　括弧をつけずに単に $p \vee q \vee r$ と書いたときに，これが $(p \vee q) \vee r$ と $p \vee (q \vee r)$ のどちらを意味するのかを気にする必要がないのは結合則のおかげである．一般に，論理演算 $\otimes$ が結合的ならば，有限個の命題に渡る式 $p_1 \otimes p_2 \otimes \cdots \otimes p_n$ はどこにどのように括弧をつけても，(その括弧の付け方が正当である限りは) 同じ真理値に評価される．例えば，

$$(p_1 \otimes (p_2 \otimes (p_3 \otimes p_4))) \otimes p_5, \quad (p_1 \otimes (p_2 \otimes p_3)) \otimes (p_4 \otimes p_5),$$
$$(p_1 \otimes p_2) \otimes (p_3 \otimes (p_4 \otimes p_5)), \quad p_1 \otimes (p_2 \otimes (p_3 \otimes (p_4 \otimes p_5)))$$

などはどれも同じ真理値を持つ．$\otimes$ が結合的でない場合は，いちいち括弧を明示的につけてやらないと式が確定せず，面倒なことになる．**結合則は地味に見えて，実はかなりありがたい法則である**．□

命題 1.4. 任意の命題 q について，

(1) $\mathrm{T} \wedge q \equiv q$, $\mathrm{T} \vee q \equiv \mathrm{T}$ である．
(2) $\mathrm{F} \wedge q \equiv \mathrm{F}$, $\mathrm{F} \vee q \equiv q$ である．

これも真理値表を作成すればすぐに分かることである．論理積・論理和の意味を考えても明らかだろうから，わざわざ説明する必要はないだろう．

1.3　否定と de Morgan の法則

命題 p の**否定**は，文字通り「p ではない」という意味を表し，それを $\bar{p}$ と書く．[*4] つまり，p が真ならば $\bar{p}$ は偽，p が偽ならば $\bar{p}$ は真というように，p と否定 $\bar{p}$ は反対の真理値を持つように定義される．次の命題はこの定義から明らかであろう．

命題 1.5. 任意の命題 p について，

[*4] 否定のことを $!p$, $\neg p$ などと書く記法もある．分野や文献によって記号の差がある．

(1) **二重否定律**: $\bar{\bar{p}} \equiv p$.
(2) **矛盾律**: $p \wedge \bar{p} \equiv \mathrm{F}$.
(3) **排中律**: $p \vee \bar{p} \equiv \mathrm{T}$.

これらのシンプルな法則は古典論理の特徴的な法則であるが, それらは**命題の真理値が真と偽だけに単純化されている**ことの賜物である．例えば, 二重否定律について, 日常語では「あの件に私が関与したとは言えないわけではないとも言えない」(で,「結局はどっちやねん?」) などと曖昧な表現が可能であるが, 数学では否定が奇数回であるか偶数回であるかによって, 否定か肯定かにきっちり分かれてしまう．

正しい否定文を作ることは必ずしも簡単ではない．特に, 論理積や論理和が関わる文の否定では, 次の **de Morgan 則**を正しく運用することがキーポイントである．これはご覧の通り, 否定を取れば論理積と論理和が互いに他方へ変換されるという規則である．

de Morgan 則

定理 1.6. 任意の命題 p, q について,

$$\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q},$$
$$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}.$$

証明. 真理値表 3 を作成すればよい．表を完成させることは演習問題とする (→演習 1.2). □

表 3　de Morgan 則を確かめるための真理値表.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
F	F	T	T						
F	T	T	F						
T	F	F	T						
T	T	F	F						

▶ **演習 1.2**　表 3 を完成させよ．

♦ **例 1.7**　「この寿司屋は安くておいしい」の否定は「この寿司屋は高くてまずい」ではなく, ちょっと歯切れが悪いが「この寿司屋は高いか, あるいはまずい」である．これには,「高くてまずい」寿司屋だけではなく, たとえば「高いけどおいしい」という寿司屋も該当する．安いとおいしいを両方否定するのは**否定しすぎ**である． □

de Morgan の法則は, 3 個以上の命題についても同様に成立する:

$$\overline{p_1 \wedge \cdots \wedge p_n} \equiv \bar{p}_1 \vee \cdots \vee \bar{p}_n,$$
$$\overline{p_1 \vee \cdots \vee p_n} \equiv \bar{p}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{p}_n.$$

これは命題の個数 n に関する数学的帰納法で確かめられる．

1.4 仮定と結論

「p ならば q である」という意味を表す命題を $p \to q$ と書き, p を**仮定**または**前件**, q を**結論**または**後件**と呼ぶ．この形式の命題を**条件命題**と呼ぶが, 条件命題と言う代わりに**論理包含**あるいは**論理含意**と言うこともある．例えば,「毎日歩けば健康になる」と言う場合,「毎日歩く」ことは「健康であるための方法」の一つとして含まれているが, これが「包含」「含意」という言葉のイメージである．

表 4　$p \to q$ の真理値表．太赤字部分に注意．

	p	q	$p \to q$
(1)	F	F	**T**
(2)	F	T	**T**
(3)	T	F	F
(4)	T	T	T

表 4 は $p \to q$ の真理値表による形式的な定義である．(3) と (4) は「p ならば q である」という日常語感覚に一致していて分かりやすい一方で, (1) と (2) はちょっと不自然に見える．そこでは, **仮定 p が偽であるときには, $p \to q$ は結論 q 自身の真偽に関係なく真である**と定義されている．このように, p が偽なので $p \to q$ が真であるという場面を指して, $p \to q$ は**空虚に真**であると言う．

なぜ表 4 のように定義するのか　表 4 は空虚な真という一見不自然なルールを含むが, どうしてそのような定義になったのだろう？ 表 4 の由来を, $p \to q$ の否定から探ってみよう．$p \to q$ は「p ならば q である」の意味だとすると, その否定は「p であるのに q でない」であり, したがって

$$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \bar{q}$$

であると考えてみる．すると, de Morgan の法則と二重否定律から,

$$p \to q \equiv \overline{p \wedge \bar{q}} \equiv \bar{p} \vee \bar{\bar{q}} \equiv \bar{p} \vee q \tag{1}$$

が成り立つ．このように, $p \to q$ の形式的な定義は $\bar{p} \vee q$ であると考えて, これを真理値表に書いたものが表 4 である．

ところで, この説明では, $p \to q$ の否定は $p \wedge \bar{q}$ (p なのに q でない) であることになっているが, $\bar{p} \wedge q$ (p でないのに q である) は否定しなくていいのだろうか？ この点については, 次の具体例で日常語レベルの理解を観察してみよう．

♦ **例 1.8**　謎の感染症 X について,「X に罹ると高熱が出る」という主張 P を考える．p を「X に罹る」とし, q を「高熱が出る」とすると, P の主張は $p \to q$ である．X に罹ったのに高熱が出ない患者がいる場合は P は間違いであるが, これがまさに $p \to q$ の否定である $p \wedge \bar{q}$ が起こった状況である．

ここで, X に罹ったわけでもないのに高熱が出た患者が現れたとしよう．これは $\bar{p} \wedge q$ という状況だが, このとき P は否定されるだろうか？ P は「X に罹ると高熱が出る」とは主張しているが,「X に罹らなければ高熱は出ない」とは一言も言っていないし, そもそも X に罹らない時のことについては何も言っていない．だから, X 以外の原因で高熱が出た患者が出たとしても, それで P が否定されるわけではない．実際, 高熱症状を呈する疾患はたくさんあるが, そのことが P を否定する根拠にはならない．P を否定するには, X に罹ったのに高熱が出ない患者の存在を示さなければならない．□

☕ Coffee Break ☕

形式的な定義とその解釈

$p \to q$ の正式な定義は $\bar{p} \lor q$, あるいはそれを真理値表にした表 4 である.「p ならば q である」はそこに込められた一つの解釈であり, **その解釈が正式な定義というわけではない**. (想像力豊かな人なら, 表 4 に「p ならば q である」以外の解釈を見出せるかも知れない.) これは論理包含に限らず, 論理積, 論理和など他の論理演算についても同じである. 極論すれば, **形式的定義に '解釈' は無用である**.

とはいえ, 形式的定義もなるべく日常語感覚に沿うように意図して作られていることも確かである. しかし, 時に曖昧さを含む豊かな日常語の感覚を単純化された世界の形式的定義へ翻訳する際には, どうしても少々不自然なところが残ってしまうこともある. $p \to q$ の定義についても, それを「p なのに q でない」の否定と考えるところはよくても, そのせいで「空虚な真」という一見不自然なルールが副作用として生じた. だが, この副作用も考え方次第である. $p \to q$ は仮定 p が成り立っていない場合のことについては何も主張しておらず, 積極的に偽だと断定する理由はなく, したがって**消極的に真**だと見なしておこうということだと考えておけばいい. (何も言っていないことに対して「嘘つきだ」と非難されるのもおかしな話だろう.) 大きな不自然さが残るような定義では困るが, 考え方次第という程度の不自然さであれば,「形式的定義とはそういうものだ」と割り切ってしまおう.

この例ように, 日常語レベルでも「p ならば q である」は「原因 p があれば結果 q が起こる」とは言っていても,「p がなければ q もない」「p が q の**唯一の**原因である」とは言っておらず,「p でないのに q である」場合も認めている. このことを踏まえると, $p \to q$ の否定はもっぱら $p \land \bar{q}$ であると考えておくのが日常語的感覚の「p ならば q である」に最も近い定義になる.

空虚な真に関する注意あれこれ　**空虚な真は, 仮定が偽であれば結論が真であることを意味しない**. つまり, p が偽であれば $p \to q$ は空虚に真であるが, q 自身の真偽は全く別問題である. 例えば,「$\sqrt{2}$ が有理数ならば, ダイヤモンドは水素でできている」のような結論がデタラメな命題も, 仮定が偽であれば空虚には真である. もちろん, それが真とは言っても所詮は '無害だが空虚な' 妄想話に過ぎない.「$\sqrt{2}$ が有理数ならば, Riemann 予想[*5]は正しい」という主張も空虚に真であるが, それは何も $\sqrt{2}$ が有理数であることを仮定すれば何らかの深淵な理由があって Riemann 予想が導かれるというリンクがあることを意味するものではないし, 仮にそんなリンクがあったところでそれで Riemann 予想が証明されるわけではない.

$p \to q \equiv \bar{p} \lor q$ なので, q が真であれば, p の真偽に関係なく $p \to q$ は必ず真である. 言わば, q がそれ単独で既に真だから, 仮定 p の成否がどうだろうが q が真であることは動かないという感じである. 空虚な真の場合でもそうだったが, **$p \to q$ が真であっても, それは必ずしも p から何らかの理由があって q が導かれるという関係性を表してはいない** (→例 1.9). ここも,「p ならば q である」が持つ日常語的感覚には必ずしもフィットしない要注意ポイントである.

♦ **例 1.9**　「Riemann 予想が成り立つならば, $\sqrt{2}$ は無理数である」という命題 P を考える. 結論部の「$\sqrt{2}$ は無理数である」は Riemann 予想云々とは関係ないところで真と分かる主張であり, このことから P は真であることは直ちに分かる. それは単に表 4 の規則を形式的に当てはめれば分かることであって, Riemann 予想から $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明するという議論をしなくても済むことである. □

以上のように, 論理包含はなかなか厄介で, 日常語の「ならば」に近いとは言え, 全く同じというわけでは

[*5] ここで, Riemann 予想の中身は重要ではない. とにかく, 2025 年現在でも未解決の超難問だと思っておけばよい.

ない. 日常語の「ならば」は想像以上に繊細かつ多義的で, その全てを古典論理の論理包含で受け止め切れるわけではない. **論理包含に関しては, $p \to q$ の定義はあくまで $\bar{p} \vee q$ であると割り切って, 日常語の「ならば」に引きずられ過ぎないように注意しよう**.

1.5　推論と恒真式

「この事件の犯人は A か B のどちらかしかいない. でも, A が犯人ではないことを示す新たな証拠が見つかった. A にこの犯行は不可能だということは, 犯人は B しかいない」——これはごく当たり前の話だが, こういう些細な場面でも一つの思考ルールが働いている: 2 つの可能性があって, 一方が否定されたとき, 残されたもう一方が成り立つしかない. こうした思考ルールはたくさんあるが, 本項ではそれらを一般的な立場から考えてみよう. 例として, 次の式を考える:

$$P(x, y) = (x \vee y) \wedge \bar{y}.$$

ここで, x と y は**変数**であり, そこには任意の真理値, つまり T または F を代入できるものとする. 例えば, x に T を, y に F をそれぞれ代入すれば,

$$P(\mathrm{T}, \mathrm{F}) = (\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \wedge \bar{\mathrm{F}} = \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} = \mathrm{T}$$

となる. これは多項式の変数に具体的な値を代入して計算する操作と感覚的には同じである. このように, いくつかの変数を含み, そこに各々任意の真理値を代入すれば真偽が確定する式を**命題論理式**あるいは単に**論理式**と呼んでおく. 複数の論理式を $\wedge$, $\vee$, $\to$ で繋げば新たな論理式が生まれる. 例えば, $x \wedge y$ と $x \vee y$ を $\to$ で繋げば論理式

$$(x \wedge y) \to (x \vee y)$$

が生じる. また, 論理式 P の否定 $\bar{P}$ も論理式である. 例えば, $P(x, y) = (x \vee y) \wedge \bar{y}$ に対して,

$$\overline{P(x, y)} = \overline{(x \vee y) \wedge \bar{y}}$$

である. 論理式の各変数に対して真理値を代入する個々の組み合わせを**真理値割り当て**または単に**割り当て**と呼ぶ. 例えば, 変数が x, y の 2 個であるとき, 割り当ては全部で $(x, y) = (\mathrm{F}, \mathrm{F}), (\mathrm{F}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{F}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})$ の 4 つである. 同様に, 変数が 3 個あるならば, 割り当ては全部で $(\mathrm{F}, \mathrm{F}, \mathrm{F})$, $(\mathrm{F}, \mathrm{F}, \mathrm{T})$, $(\mathrm{F}, \mathrm{T}, \mathrm{F})$, $(\mathrm{F}, \mathrm{T}, \mathrm{T})$, $(\mathrm{T}, \mathrm{F}, \mathrm{F})$, $(\mathrm{T}, \mathrm{F}, \mathrm{T})$, $(\mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{F})$, $(\mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T})$ の 8 個である. 一般に, n 個の変数を持つ論理式に対しては, 全部で 2^n 通りの割り当てがある. それはもちろん, n 個の変数の各々について 2 通りの選択 T, F があるからである.

推論

定義 1.10. 論理式 P, Q について, P を真にする全ての割り当てに対して Q も真であるとき, P から Q が**推論**できると言い,

$$P \Rightarrow Q$$

で表すことにする.

これは要するに, P が真であるときにはいつでも必ず Q も真であるという意味であり, 言い換えれば P を根拠にして Q を結論できるということである. このように, 推論とは文字通り「論を推し進める」という意味であり, **そこに ‘推測’ という含みは全くない**.

♦ **例 1.11**　$P(x,y)=(x\vee y)\wedge\bar{y}$ と $Q(x,y)=x$ とおく.[*6] P が真であるのは $x\vee y$ が真かつ $\bar{y}$ が真のときだけだが, それは x が真で y が偽のときだけである. つまり, $(x,y)=(\mathrm{T},\mathrm{F})$ が P を真にする唯一の割り当てであるが, これに対して $Q(\mathrm{T},\mathrm{F})=\mathrm{T}$ となる. よって, 推論

$$(x\vee y)\wedge\bar{y}\Rightarrow x$$

が成り立つ. これは,「x または y だという状況で, y でないとすれば, 必ず x である」という意味の推論であり, 日常語的な感覚からしても当たり前である. これは**選言三段論法**と呼ばれる推論であり,[*7] 冒頭に掲げた「犯人は A か B か」の話はこの選言三段論法の具体的な使用例である. □

本巻の中では, 余計な混乱を避けるために $\Rightarrow$ をもっぱら推論の意味でのみ用いるが, これが $\to$ (論理包含) の意味で使われることもよくあるし, $p\to q$ が真であることを指して $p\Rightarrow q$ と書くこともよくある. $p\to q$ が真であるときには, p が真であれば q も必ず真なので,「あっちが真ならばこっちも真」という推論が起こっているように見えるからである.

実際のところ, $\Rightarrow$ も $\to$ も共に「ならば」と読んでおけば混乱が起きることはない. しかし, そのことが $\Rightarrow$ と $\to$ の区別を難しくしている面もある. $\Rightarrow$ は 2 つの論理式の関係性を表し, $\to$ は 2 つの命題を繋いで一つの命題を作る操作を表すので, それらは概念上は別物である. とは言え, 両者は全くの無関係というわけではなく, むしろ密接に関係しあっている. そのことを説明するために, 次の定義を用意しよう.

恒真式と矛盾式

定義 1.12. 論理式 P の全ての割り当てに対して P が真であるとき, P は**恒真式**であると言う. 同様に, P の全ての割り当てに対して P が偽であるとき, P は**矛盾式**であると言う.

‘恒’ は「常に」という意味であり, 恒真式とは「常に真である論理式」である. 例えば, $x\vee\bar{x}$ は恒真式であり, $x\wedge\bar{x}$ は矛盾式である. P が恒真式であることは, その否定 $\bar{P}$ が矛盾式であることと同じである. 恒真式のことを**トートロジー**とも言うが, この言葉は「同義反復」という意味で (しばしば否定的なニュアンスで) 用いられることもある. もちろん, ここで言う恒真式 (トートロジー) は修辞法としての同義反復とは全く別物である.

論理式 P, Q に対して, それらを論理包含で繋いだ論理式

$$P\to Q$$

を考える. これが恒真式ならば, P を真にする全ての割り当ての下で, P と $P\to Q$ は共に真だから, Q も真である. つまり, 推論 $P\Rightarrow Q$ が成り立つ. このように, 一般に論理式 P, Q に対して $P\to Q$ が恒真式ならば推論 $P\Rightarrow Q$ が成立する.

逆に, 推論 $P\Rightarrow Q$ が成り立つとき, P を真にする割り当てについて Q も真なので, その割り当ての下で $P\to Q$ は真である. そして, P を偽にする割り当ての下では, $P\to Q$ は空虚に真である. よって, いずれにせよ $P\to Q$ は全ての割り当ての下で真であり, $P\to Q$ は恒真式である. このように, $P\to Q$ が恒真式であることと推論 $P\Rightarrow Q$ が成り立つことは表裏一体である.

[*6] Q には y が現れていないが, 形式的には Q も変数 x と y に関する論理式であり, たまたま y が現れていないだけだと考える.
[*7] この「選言三段論法」という名称をいつまでも覚えておく必要はない. この後にいくつか出てくる推論あるいは誤謬の名称についても同様である.

♦ **例 1.13**　次の論理式

$$((x \vee y) \wedge \bar{y}) \to x \tag{2}$$

は恒真式であることは次の要領で確認できる:

- 仮定 $(x \vee y) \wedge \bar{y}$ が偽であれば, 式 (2) は空虚に真である.
- 仮定 $(x \vee y) \wedge \bar{y}$ が真であるのは, $x \vee y$ と $\bar{y}$ が共に真であるとき, すなわち x が真かつ y が偽のときだけだが, そのときは x も真なので, 式 (2) は真である.

このように, 式 (2) は恒真的だから, 推論 $((x \vee y) \wedge \bar{y}) \Rightarrow x$ が成り立つことがわかるが, これは例 1.11 で述べた選言三段論法である. □

♦ **例 1.14**　次の論理式を考える:

$$((x \to y) \wedge x) \to y.$$

$(x \to y) \wedge x$ が真ならば, x と $x \to y$ は共に真であり, したがって x と y は共に真である. この場合は, $((x \to y) \wedge x) \to y$ は真である. $(x \to y) \wedge x$ が偽ならば, $((x \to y) \wedge x) \to y$ は空虚に真である. よって, いずれにせよ $((x \to y) \wedge x) \to y$ は必ず真, つまり恒真式である. ゆえに, 推論 $((x \to y) \wedge x) \Rightarrow y$ が成り立つ. これは**前件肯定**または**モーダスポネンス**[*8]と呼ばれる推論であるが, 要するに「x ならば y であるという状況で, x が成り立てば, y も成り立つ」という意味であり, 日常語感覚的にもごく当たり前のことである. □

♦ **例 1.15**　次の論理式

$$((x \to y) \wedge \bar{x}) \to \bar{y}$$

は x が偽かつ y が真のときに偽なので恒真的ではない. まさにその場合に, $(x \to y) \wedge \bar{x}$ は真であるが $\bar{y}$ は偽なので, 推論 $(x \to y) \wedge \bar{x} \Rightarrow \bar{y}$ は機能しない. これは,「x ならば y である」という状況下で, x でないことから y ではないと結論しようとするものだが, これは**誤謬** (間違った推論) の典型例の一つであり, **前件否定**と呼ばれている. 例えば,「インフルエンザに罹ると高熱が出る」と「この病気はインフルエンザではない」から「この病気では高熱は出ない」と結論していいだろうか?

同じく, 次の論理式

$$((x \to y) \wedge y) \to x$$

も x が偽かつ y が真のときに偽なので恒真的ではなく, したがって推論 $(x \to y) \wedge y \Rightarrow x$ は機能しない. これは「x ならば y である」という状況下で, y であったことから x であったと結論しようとするものだが, これもまた典型的な誤謬の一つで, **後件肯定**と呼ばれるものである. 先の具体例を用いれば, 後件肯定は「インフルエンザに罹ると高熱が出る」と「この病気では高熱が出た」から「この病気はインフルエンザである」と結論するようなものである.

$x \to y$ を素直に「x ならば y である」と読むならば, 前件否定と後件肯定はどちらもそれに「x でなければ y でない」「y ならば x だったはず」という余計なことをくっつけてしまった誤謬である.「インフルエンザに罹ると高熱が出る」ことは認めたとして, インフルエンザ以外の疾患で高熱が出る可能性を考慮していない. □

[*8] ラテン語 modus ponens.「肯定による肯定」という意味.

ここまでの例で見てきたように, 推論規則は一定の状況下で特定の結論を導くための一般的な思考のテンプレートのようなものだと思えばいいだろう．ここでは一般論的な説明のために, 論理式や割り当て, 恒真式などという概念を用いたが, 普段はそこまで意識することなく, ごく自然に推論規則を使いこなすことができる．ただし, 例 1.15 で見たように**一見もっともらしく見えて実は間違っている推論形式もある**ので要注意である．

▶ **演習 1.3**　次の論理式はどれも恒真式であることを, $\to$ や $\wedge$, $\vee$ などの意味を解釈することによって確認し, それがどのような推論規則を与えるものかを述べよ．その後, 解釈を用いずに, 式変形または真理値表を作成するなどの方法によって恒真性を形式的に確認せよ．

(1) $((x \to y) \wedge \bar{y}) \to \bar{x}$.
(2) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$.
(3) $((x \vee y) \wedge (x \to z) \wedge (y \to z)) \to z$.

▶ **演習 1.4**　論理式 $P(x, y) = ((x \vee y) \wedge x) \to \bar{y}$ は恒真式であるか? これが恒真式であれば, それは推論 $((x \vee y) \wedge x) \Rightarrow \bar{y}$ を導くが, これがどのような推論であるかを言葉で説明し, その具体例を挙げよ．これが恒真式でないならば, 推論 $((x \vee y) \wedge x) \Rightarrow \bar{y}$ は機能しないが, この推論が機能しない具体的な実例を挙げよ．

▶ **演習 1.5**　P, Q, R を論理式とする．

(1) $P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow R$ ならば, $P \Rightarrow R$ であることを示せ．
(2) $P \Rightarrow R$ かつ $Q \Rightarrow R$ ならば, $P \vee Q \Rightarrow R$ であることを示せ．

1.6　矛盾と爆発律

理論には矛盾があってはいけないとは誰しも思う．矛盾含みの理論と聞いただけで, 何だか信用できない気分になる．でも, なぜ矛盾があってはいけないのだろう? 多少矛盾があっても, それが局所的な小さな傷で済むのであれば大した問題ではないのでは?

結論から先に言えば, 数学のように高度に論理的な理論にとって, 矛盾は決して ‘小さな傷’ では済まされず, 理論全体を破壊する力を持っている．ちょっと雑な説明になるが, その背景を簡単に説明しておこう．

まず最初に,「矛盾」の意味をもう少し明確にしておこう．理論の**矛盾**とは, その中で何らかの命題 p に対して, p が真である証明と $\bar{p}$ が真である証明の両方が可能であることを指すものとする．そのような, まさに矛盾した状況が起こっていると考えよう．

任意の命題 q を考える．$x \to x \vee y$ は恒真式なので, 推論 $x \Rightarrow x \vee y$ が成り立つ．p は真なので, この推論 $x \Rightarrow x \vee y$ から $p \vee q$ も真である．さらに $\bar{p}$ も真なので, 選言三段論法 $(x \vee y) \wedge \bar{x} \Rightarrow y$ を適用すれば q が真であることが分かる．これは任意の命題 q について言えるので, その否定 $\bar{q}$ もまた真である (つまり, q は偽である) ことになる．この通り, 結局は全ての命題が真でも偽でもあるというメチャクチャな状況になっている．こうなると理論は「何でもアリ」な状態に陥っていて, 真・偽という真理値もその意味を失っており, もはや理論は破綻している．

このように, **矛盾は局所的な小さな綻びにとどまらず, 理論全体を破壊してしまう爆発的な威力を持つ**．矛盾から任意の命題が導かれるという現象は, まさに**爆発律**という物騒な名前で呼ばれている．

1.7　対偶と背理法

命題 $p \to q$ に対して, $\bar{q} \to \bar{p}$ (q でないならば p でない) をその**対偶**と呼ぶ. 式 (1) と二重否定則から,

$$\bar{q} \to \bar{p} \equiv \bar{\bar{q}} \vee \bar{p} \equiv q \vee \bar{p} \equiv p \to q$$

だから, $p \to q$ とその対偶 $\bar{q} \to \bar{p}$ の真偽は一致する. よって, $p \to q$ を証明するとき, 代わりに対偶 $\bar{q} \to \bar{p}$ を証明してもよい. これが**対偶証明法**の考え方である.

♦ **例 1.16**　n を平方数ではない自然数とするとき, $\sqrt{n}$ は無理数である. これを対偶証明法で証明しよう. 対偶命題は「$\sqrt{n}$ が有理数ならば, n は平方数である」であり, これを証明する. $\sqrt{n}$ は有理数なので, それを分数表示できる. $\sqrt{n} = a/b$ (a, b は整数, $b \neq 0$) とする. なお, a/b はこれ以上約分できないものとする. つまり, $\gcd(a,b) = 1$ であるとする. $a = 0$ ならば, $n = 0$ であり, したがって n は平方数である. よって, 後は $a \neq 0$ である場合を考えればよい. $\sqrt{n} = a/b$ なので, $n = a^2/b^2$, したがって $nb^2 = a^2$ である. よって nb^2 は a の倍数であるが, a と b は互いに素, したがって a と b^2 も互いに素なので, n が a の倍数である. ゆえに, ある整数 c を用いて $n = ac$ と表される. すると, $a^2 = nb^2 = acb^2$ となる. この両辺を $a \neq 0$ で割ると, $a = cb^2$ となるので, a は b の倍数である. ゆえに, $1 = \gcd(a,b) = b$ である. よって, $a^2 = nb^2 = n$ であり, n は平方数である. □

対偶証明法で書かれた証明は背理法による証明とほぼ同じになることもある. 例えば, 例 1.16 で書いた証明は対偶証明法を用いたものであるが, それを「n が平方数でないのに $\sqrt{n}$ が有理数である」と仮定したら矛盾するという背理法で書いても中身はほぼ同じ議論になる.

ここで**背理法**とは, 言うまでもなく, p が正しくないと仮定すると矛盾が起こることを証明することで p が正しいことを証明する手法である. でも, なぜそのような矛盾が起これば p が正しいと結論できるのだろうか?「矛盾は破綻を招くから, それを起こす原因 (仮定) は否定されるべき」と言えば一見もっともらしいが, それは「臭いものには蓋」という程度のナイーブな理屈であって, 論理的根拠とまでは言い難い.

ちょっと雑な説明になるが, 背理法が正当な推論である理由を見ておこう. x を任意の命題を表す変数, F を任意の矛盾式とするとき, 二重否定則を使うと $\bar{x} \to \mathrm{F} \equiv \bar{\bar{x}} \vee x \equiv x \vee \mathrm{F} \equiv x$ となるので,

$$(\bar{x} \to \mathrm{F}) \to x \equiv x \to x \equiv \bar{x} \vee x \equiv \mathrm{T}$$

である. (最後は排中律を用いている.) よって, 次の推論が成立する:

$$(\bar{x} \to \mathrm{F}) \Rightarrow x. \tag{3}$$

$\bar{x} \to \mathrm{F}$ は「x が正しくないならば, F が真だという矛盾が起こる」という意味であり, そのような矛盾が起これば x が正しいというのがこの推論, すなわち背理法である. もっと精密な説明には数理論理学的な視点が必要になるが, ここでは**背理法は (少なくとも古典論理では) 正当な推論である**ことが分かれば十分である. 背理法には「矛盾は破綻を招くから否定されるべき」というナイーブな理屈ではない正当な根拠があるが, 普段使いのときにはもちろん「矛盾は否定されるべき」という感覚でも不都合はない.

♦ **例 1.17**　背理法の事例の一つとしてよく出てくるのが,「素数は無限個存在する」という命題の証明である. 素数が有限個しかないと仮定して, それらの全てを $p_1, p_2, \dots, p_n$ で表す. 自然数 $k = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ は 2 以上の自然数であるが, どの素数 p_i でも割り切れない. 一方で, **初等整数論の基本定理**によれば, 2 以上の自然数は必ず何らかの素数で割り切れるはずなので, ここで矛盾が発生する. ゆえに,「素数が有限個しかない」という仮定が否定されて,「素数は無限個存在する」と結論される.

この理屈と同じ発想で, 背理法を用いない証明を書くこともできる. 有限個の素数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ をどのように集めても, $k = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ の素因数は $p_1, p_2, \dots, p_n$ のいずれとも一致しないので, 有限個の素数だけでは全ての素数を網羅できない, という理屈にすればいい. Euclid の『原論』にはこちらの理屈に基づく証明が与えられている. □

☕ Coffee Break ☕

背理法は避けるべきなのか?

背理法は嫌われ論法として槍玉に上がることがある. 背理法嫌いの理由としては,「背理法はあり得ない仮定の下での議論だから空虚で意味がない」「背理法は '真である' ことの証明ではなくて '偽ではない' ことの間接証明に過ぎない」などがよく挙げられるようだ. しかし, 本文中でも述べた通り, 背理法は少なくとも古典論理の範囲では論理的に正当な推論である. 例えば, 背理法を用いれば簡潔で分かりやすい証明が書けるのであれば, 背理法を無理に避ける必要はなく, 背理法を使うメリットは十分ある.

ただし, 採用される論理体系によっては, 背理法が正当性を失うことや, 著しく制限を受けることはあり得る. もっとも, 推論規則の正当性が採用される論理体系に依存することは背理法に限った話ではない.

1.8　逆と裏

$p \to q$ に対して, $q \to p$ をその**逆**, $\bar{p} \to \bar{q}$ を**裏**と呼ぶ. 逆と裏は互いに他方の対偶だから同じ真理値を持つ. しかし, $p \to q$ とその逆 $q \to p$ (および裏 $\bar{p} \to \bar{q}$) は必ずしもそうではない. $p \to q$ と $q \to p$ の真偽が一致するのは, p と q の真偽が一致する場合であり, その場合しかない (→表 5).

表 5　$p \to q$ と $q \to p$ の真理値表.

p	q	$p \to q$	$q \to p$
F	**F**	**T**	**T**
F	T	T	F
T	F	F	T
T	**T**	**T**	**T**

♦ **例 1.18**　「インフルエンザに罹ると高熱が出る」が正しいとしても, その逆命題「高熱が出たのはインフルエンザに罹ったからだ」および裏命題「インフルエンザに罹らなければ, 高熱は出ない」は正しくない. 高熱症状がある疾患は, インフルエンザ以外にもたくさんある.

逆は必ずしも真ならずという格言があるが, それは $p \to q$ が真であってもその逆 $q \to p$ は必ずしも真ではないことを注意している. 世の中にも「逆は必ずしも真ならず」の事例は山ほどあり, その気になって探してみればいくらでも見つけられる. 例 1.15 で見た後件肯定 $(x \to y) \wedge y \Rightarrow x$ はこの格言を無視した誤謬である. □

♦ **例 1.19**　「新潟は米の名産地である」とは自他ともに認めるにしても,「新潟でなければ米の名産地ではない」などと言おうものなら**宮城や山形だって黙ってはいない**. これは $p \to q$ とその裏 $\bar{p} \to \bar{q}$ が噛み合わない一例である. □

逆と裏は互いに他方の対偶であり真偽が一致するので,「逆は必ずしも真ならず」は「**裏は必ずしも真ならず**」ということでもある．例 1.15 で見た前件否定 $(x \to y) \wedge \bar{x} \Rightarrow \bar{y}$ はこの格言を無視した誤謬である．例えば,「明日雨が降ったら遠足は中止」というとき, 次の日が晴れで遠足が中止になったらおかしいと思うだろうか? 雨以外の原因で遠足が中止になる可能性もあるわけで,「晴れなのに遠足は中止」というだけでおかしいとは断定できない．何の理由もなく遠足が中止になったときでさえ, **社会的にはもちろんおかしいが**, 論理的には間違いではない．

1.9　必要条件と十分条件

$p \to q$ が真であるとき, p は q であるための**十分条件**であると言い, q は p であるための**必要条件**であると言う．これらの用語に混乱を覚える人も少なくないが, 概ね次のようなイメージを持っておけばよい．

- $p \to q$ は, q を満たすためには p が満たされればそれで**十分**であることを意味する．
- $p \to q$ は対偶 $\bar{q} \to \bar{p}$ と同等であり,「q でない限り p ではない」と読める．つまり, p を満たしたいならば, 最低でも q を満たすことが**必要**である．ただし, q **を満たすだけではダメかも知れないが**.

♦ **例 1.20**　4 の倍数は全て偶数であるから,「偶数であること」は「4 の倍数である」ためには必要な条件である．しかし, 偶数であれば 4 の倍数であるかと言うと, それは間違いである．例えば, 6 は偶数ではあるが 4 の倍数ではない．したがって,「偶数であること」は「4 の倍数である」ためには十分な条件ではない． □

♦ **例 1.21**　今シーズンも後残りわずかとなったが, 今現在, 1 位川崎フロンターレは勝点 70, 2 位ベガルタ仙台は勝点は 66 であり, 3 位以下を大きく引き離している.*9 両者の直接対決は既に終わっていて, 川崎も仙台もあと 2 試合を残すのみとなっている．この場合, 川崎が残り 2 試合のうちどちらか一方でも勝利すると, 他クラブの勝敗に関係なく川崎の優勝が確定する．実際, 川崎は少なくとも勝点 73 に到達するが, 仙台は残り 2 試合に全勝しても勝点 72 なので川崎に届かない.*10 よって, 川崎にとっては「残り 2 試合のうち 1 つ以上に勝利する」ことは優勝するための十分条件である．一方, 仙台が逆転優勝するには「川崎が残り 2 試合が共に引き分け以下である」ことが必要条件である．しかし, これは十分条件ではない．たとえ川崎が残り 2 試合に全敗しても, 仙台もいっしょに 2 連敗してしまったら台無しである． □

♦ **例 1.22**　整数係数の $n(\geq 1)$ 次多項式*11 $f(x)$ に関する次の 2 つの条件を考える．

M1: f の全ての係数は偶数である．
M2: 全ての整数 α に対して, $f(\alpha)$ は偶数である．

条件 M1 は条件 M2 のために必要であるか, 十分であるかをそれぞれ考えてみよう．

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ が条件 M1 を満たしているとき, f の全ての係数 a_k は偶数である．したがって, 任意の整数 α について $a_k\alpha^k$ は全て偶数であり, よって $f(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k$ も偶数である．ゆえに, f は条件 M2 を満たす．よって, 条件 M1 は条件 M2 のために十分な条件である．

---

*9 あくまで**個人的主観に基づく妄想的事例**です．

*10 なお, 勝利が勝点 3, 引き分けは勝点 1, 敗戦は勝点 0 である．

*11 高校数学では, 単項式 (ax^k のように項が一つだけの式) と多項式 (複数の単項式の和で表される式) を区別して, 両者を合わせて「整式」と呼ぶのが一般的であるようだ．大学以降の数学では単項式は多項式の特別な場合と見なして, 高校数学で「整式」と呼んでいたものは全て「多項式」と呼ばれることが普通である．

$f(x) = x(x+1) = x^2 + x$ は奇数を係数に含む多項式であるが, 任意の整数 α について, α または $\alpha+1$ の一方は必ず偶数なので, $f(\alpha) = \alpha(\alpha+1)$ は偶数である. よって, f は条件 M1 を満たしていないが, 条件 M2 を満たしている. したがって, 条件 M1 は条件 M2 のためには必要ではない. つまり, M1 を満たしていなくても M2 を満たすことは可能である. □

命題 $(p \to q) \land (q \to p)$ を $p \leftrightarrow q$ と書く. これが真であるとき, p と q は互いに**同値**である, 互いに他方の**必要十分条件**であると言って, $p \Leftrightarrow q$ と書く. 真理値表を作成すればわかるが (→表 6), $p \Leftrightarrow q$ となるのは p と q の真偽が一致するときであり, かつその時に限る.

表 6　論理同値 $\leftrightarrow$ の真理値表.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
F	**F**	T	T	**T**
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	**T**	T	T	**T**

♦ **例 1.23**　例 1.22 を少し変えて, 実数係数多項式 $f(x)$ に関して次の 2 つの条件を考える:

S1: f の全ての係数は 0 である. (つまり, $f = 0$ である.)
S2: 全ての整数 α に対して, $f(\alpha) = 0$ である.

f が条件 S1 を満たしていれば条件 S2 が成り立つことは明らかである. 一方で, f が条件 S2 を満たしていれば条件 S1 も成り立つだろうか.

条件 S2 から $f(1) = 0$ なので, 因数定理から $f(x) = (x-1)f_1(x)$ という形に分解できる. ここで, f_1 は実数係数の多項式である. $f(2) = 0$ でもあるので, $0 = f(2) = f_1(2)$ である. よって, f_1 に因数定理を適用すれば, $f_1(x) = (x-2)f_2(x)$ (f_2 は実数係数多項式) と分解できる. つまり, $f(x) = (x-1)(x-2)f_2(x)$ である. f が n 次多項式であるとして, この議論を $n+1$ 回繰り返していけば,

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)(x-(n+1))f_{n+1}(x)$$

と分解されることが分かる. ここで, f は n 次多項式であるが, もし $f_{n+1} \neq 0$ であれば, 右辺は $n+1$ 次以上の多項式になってしまうので, 実は $f_{n+1} = 0$ である. ゆえに, $f = 0$ でもある. したがって, 条件 S1 が成立する. 以上から, 条件 S1 と条件 S2 は同値である. □

2　論理の基礎・後編

本節では, 前節に引き続いて論理の基礎について学んでいくが, 本節では前節までには無かった新しい要素が登場する. それは「命題関数」あるいは「述語」と呼ばれるもので, 平たく言えば命題の中に ‘変数’ が現れるものである. もう一つ,「全ての (任意の)」「〜が存在する」という意味を表す要素が登場するが, これのおかげで論理で表現できることの幅が大きく広がる.

2.1　命題関数と量化子

実数 x に関する文言「x は無理数である」はそれ自身は真偽の判断にかかる対象ではないが, 変数 x に具体的な値を代入することで命題としての真偽が確定する．例えば, $x = \sqrt{2}$ のときは真, $x = 1$ のときは偽である．このような文言を**命題関数**または**述語**と呼ぶ．ここで言う命題関数 (述語) は変数を含むところは 1.5 項で用いた論理式と似ているが, それとは全く別の概念なので, 混同しないように注意しよう．

命題関数それ自身は命題ではなく, その変数を**代入**などの操作で拘束することで命題として機能する．変数を拘束する操作は代入だけではなく,「全ての〜について」や「〜であるものが存在する」という修飾語で拘束する方法もある.[*12] 例えば, 自然数 x と素数 y に関する命題関数 $p(x, y)$ を「$x \leq y \leq 2x$ である」として, 次の文を考える:

$$\textbf{全ての}自然数\ x\ に応じて,\ x \leq y \leq 2x\ となる素数\ y\ が\textbf{存在する}. \tag{4}$$

「全ての」を記号 ∀ (All, Any) で表し,「存在する」を記号 ∃ (Exist) で表すと, これは簡単に

$$\forall x \exists y[p(x, y)]$$

と表される．(素直に前から順番に読んで, $\forall x(\exists y[p(x, y)])$ と解釈する.) これは**これ自身が単独で真偽の判断にかかる命題である**．ちなみに, これは **Bertrand-Chebyshev の定理**として知られる真命題である．

「全ての」「存在する」を表す修飾記号 ∀ と ∃ をそれぞれ**全称量化子**, **存在量化子**と呼ぶ.[*13] すなわち,

$$\begin{aligned} \forall x[p(x)]\ が真 &\overset{\text{def}}{\iff} すべての\ x\ について\ p(x)\ が真, \\ \exists x[p(x)]\ が真 &\overset{\text{def}}{\iff} 少なくとも\ 1\ つ以上の\ x\ について\ p(x)\ が真 \end{aligned}$$

である．ただし, x が取り得る値の範囲は予め決まっているとする．例えば, 変数 x が取る値が 1, 2, 3 ならば,

$$\begin{aligned} \forall x[p(x)] &= p(1) \land p(2) \land p(3), \\ \exists x[p(x)] &= p(1) \lor p(2) \lor p(3) \end{aligned}$$

である．x が無限個の値を動く場合には, このように有限個の項に渡る式として書き下すことはできないが, 無限和 $x_1 + x_2 + \cdots$ を $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ と書くような感覚であえて書くと,

$$\begin{aligned} \forall x[p(x)] &= \bigwedge_{x \in X} p(x), \\ \exists x[p(x)] &= \bigvee_{x \in X} p(x) \end{aligned}$$

である．ここで, X は x が取り得る値の範囲を表し, $x \in X$ は「x が X に属している」という集合の記法である．$\exists x[p(x)]$ は $p(x)$ を満たす x が 1 つ以上存在することを意味しており, そのような x が何個あるかは問わない．(とにかく 1 つ以上あれば OK). x が唯一つであることを $\exists! x[p(x)]$ のように書くこともある．

♦ **例 2.1**　どんなに近い 2 つの実数 $x < y$ の中間にも $x < q < y$ を満たす有理数 q が存在するという事実は $\mathbb{R}$ における $\mathbb{Q}$ の**稠密性** (ちゅうみつせい) と呼ばれている．x, y を実数を表す変数, q を有理数を表す変数とするとき, 有理数の稠密性は

$$\forall x \forall y[x < y \to \exists q[x < q < y]]$$

[*12] 変数を ‘拘束する’ とは, その変数が自由に (あらかじめ許された範囲で) 値を取ることができないようにする操作のことである．
[*13]「量化子」は英語の quantifier の訳語である．**限定子**とも言われる．

と表現される．この例の場合, q は無限個存在する．□

◆ 例 2.2　実数列 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に**収束する**とは, 任意の正実数 ε に応じてある番号 n_0 が存在して, $n \geq n_0$ である全ての番号 n に対して $|x_n - a| < \varepsilon$ が成り立つことを言う．ε は正実数を表す変数, n_0 および n は自然数を表す変数とすると, x が a に収束することの定義は

$$\forall\varepsilon\exists n_0\forall n[n \geq n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon]$$

と記述できる．□

◆ 例 2.3　$p(x)$, $q(x)$ をそれぞれ変数 x を持つ命題関数とするとき,

$$\begin{aligned}\forall x[p(x) \wedge q(x)] &\equiv (\forall x[p(x)]) \wedge (\forall x[q(x)]),\\ \exists x[p(x) \vee q(x)] &\equiv (\exists x[p(x)]) \vee (\exists x[q(x)])\end{aligned}$$

である．$\forall$ は論理積 $\wedge$ に対応し, $\exists$ は論理和 $\vee$ に対応することを考えれば, これらの式は至って自然に理解できる．一方で, 次の式はどうだろうか．

$$\begin{aligned}\forall x[p(x) \vee q(x)] &\equiv (\forall x[p(x)]) \vee (\forall x[q(x)]),\\ \exists x[p(x) \wedge q(x)] &\equiv (\exists x[p(x)]) \wedge (\exists x[q(x)]).\end{aligned}$$

こちらは一般に正しくない．例えば, x が自然数値 1, 2, 3 を取り得るとして, $p(x)$ は「x は偶数である」という意味, $q(x)$ は「x は奇数である」という意味だとすれば,

- $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ は「どの x も, 偶数であるか奇数であるかのいずれかである」という意味で, 真である．一方で, $\forall x[p(x)]$ は「全ての x は偶数である」という意味で偽であり, $\forall x[q(x)]$ は「全ての x は奇数である」という意味でこちらも偽であるから, $(\forall x[p(x)]) \vee (\forall x[q(x)])$ は偽である．
- $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$ は「偶数かつ奇数である x がある」という意味だから偽である．一方で, $\exists x[p(x)]$ は「偶数である x が存在する」という意味だから真であり, $\exists x[q(x)]$ は「奇数である x が存在する」という意味だからこちらも真, したがって $(\exists x[p(x)]) \wedge (\exists x[q(x)])$ は真である．□

2.2　複数の変数を持つ命題関数と量化子

数学では, 複数の変数を含む命題関数も頻繁に登場する．例えば, 例 2.2 では実数列が収束することの定義を例に出したが, それは 3 個の変数を含む命題関数を用いて記述できる構造をしている．複数の変数を持つ命題関数で注意すべき点は, **どの変数にどの順番でどの量化子を付けるかで意味が変わる**ことである．簡単な実例でそれを実感してみよう．

◆ 例 2.4　x をある子供の集団を動く変数, y を食べ物を動く変数として, 命題関数 $p(x, y)$ を「x は y が好きである」とする．

(1) $\forall x\exists y[p(x, y)]$ は「どの子供 x にもそれぞれ好きな食べ物 y がある」ことを意味する．一人の x に対して複数の y があってもよい．例えば,「俊彦君はカレーが好き」「幸之助君は寿司とハンバーグが好き」などというように．x の相方となる y は x によって変化してもよく, むしろその方が自然である．さらに, 相異なる複数の x が同一の y を相方として共有していてもよい．例えば,「幸之助君と賢君はどちらもオムライスが好きである」というように．

(2) $\forall y \exists x[p(x,y)]$ は「それぞれの食べ物 y について, それを好きな子供 x がいる」という意味である. そのような x が 2 人以上いてもよい.
(3) $\exists x \forall y[p(x,y)]$ は「ある特定の子供 x がいて, その子は全ての食べ物 y が好きである」という意味である.「賢くんは何でも好きで食べるねぇ」というように. このような子供 x が 2 人以上いてもよい.
(4) $\exists y \forall x[p(x,y)]$ は「ある食べ物 y については, どの子供 x も好きである」という意味である.「ここにいる子供たちはみんなハンバーグが好き」というように. もちろん, このような y が 2 個以上あってもよい. □

♦ **例 2.5** x, y をそれぞれ整数を動く変数とする. $p(x,y)$ は「$2x+y$ は奇数である」という意味だとすると,

(1) $\forall x \exists y[p(x,y)]$ は「どの x についても, それに応じて $2x+y$ が奇数となる y がある」という意味であり, これは真である. 例えば, 常に $y=1$ としておけばよい.
(2) $\forall y \exists x[p(x,y)]$ は「どの y についても, それに応じて $2x+y$ が奇数となる x がある」という意味であり, これは偽である. 実際, y が偶数であれば, x をどう選んでも $2x+y$ は偶数であり, 奇数になることはない.
(3) $\exists x \forall y[p(x,y)]$ は, ある特定の x について, どんな y についても $2x+y$ は奇数であるという意味である. これは偽である. どのような x が存在すれば, $2x+0=2x$ と $2x+1$ は共に奇数であることになるが, それはあり得ない.
(4) $\exists y \forall x[p(x,y)]$ は, ある特定の y について, どんな x についても $2x+y$ は奇数であるという意味である. これは真である. 実際, y として任意の奇数を取っておけばよい. □

▶ **演習 2.1** 図 1 において, x は左側にある点を表す変数とし, y は右側にある点を表す変数として, $p(x,y)$ は「x と y を結ぶ辺が存在する」という意味だとする. このとき, $\forall x \exists y[p(x,y)]$, $\forall y \exists x[p(x,y)]$, $\exists x \forall y[p(x,y)]$, $\exists y \forall x[p(x,y)]$ の真偽はそれぞれ何か?

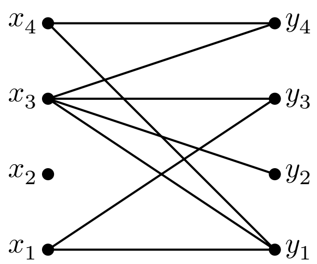


図 1 演習 2.1.

▶ **演習 2.2** 素数 x と 2 以上の自然数 y に関する命題関数 $p(x,y)$ を,「x は y の約数である」とおく. このとき, $\forall x \exists y[p(x,y)]$, $\exists x \forall y[p(x,y)]$, $\forall y \exists x[p(x,y)]$, $\exists y \forall x[p(x,y)]$ を文章で記述して, その真偽を述べよ.

量化子にまつわる日本語表現 量化子を含む文言を日本語で正確に表現するのは意外と簡単でないことがある. 量化子にまつわる日本語表現について, いくつか注意点を挙げておこう.

(1) $\exists x[p(x)]$ は「$p(x)$ である x が存在する」という意味だが, これを「**ある x が存在して $p(x)$ である**」と言うことがある. これは英語の語順による表現 (There exists x such that $p(x)$) なので日本語的には不自然に響くが, 特に $p(x)$ の部分が複雑で長くなる場合は, この表現法を使った方が誤読の可能性が少なく構造がわかりやすい文を書ける. 例えば,「n_0 以上の全ての番号 n に対して $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ となるような番号 n_0 が存在する」と言うよりも, 核心部分の 'n_0 の存在' を先に出して,「ある番号 n_0 が存在して, それ以上の全ての番号 n に対して $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」と言う方が文の構造がすっきり際立つ.

(2)「任意の x が存在して…」のように, **一つの対象に $\forall$ と $\exists$ を両方かぶせると意味が通らない**.

(3)「任意の (全ての)…」の意味が「…ならば」という言葉で表現されることもよくある. 例えば,「$x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 0$ である」は「任意の $x \geq 0$ について $f(x) \geq 0$ である」という意味である.

(4)「任意の〜」と「各々の〜」には微妙な違いがある場合がある. 例えば,「任意の x について自然数 n_x を次のように割り当てる」と言った場合, 任意に選ばれた何らかの x 一つだけについて n_x を割り当てるのではなくて, 各々の x についてそれぞれ自然数 n_x を割り当てると考えるのが普通である. さらに, n_x は x ごとに異なっていてもよいと考えるのが普通である.

(5)「全ての宿題が終わっていない」という文には, 読み方によって「どの宿題もすべからく未完了である」という解釈と,「(完了した宿題もあるかも知れないが) まだ終わっていない宿題がある」という解釈があり得る. 宿題 x が終わっていることを $p(x)$ で表すと, 前者は $\forall x\overline{[p(x)]}$ という解釈であり, 後者は $\overline{\forall x[p(x)]}$ という解釈である. (否定が掛かる範囲が違っている.) このように, **複数の解釈が可能な曖昧な文章もあるので, 前後の文脈に注意しよう**.

(6)「任意の x に対して $p(x, y)$ が成り立つ y が存在する」は $\forall x \exists y[p(x, y)]$ と $\exists y \forall x[p(x, y)]$ の両方の意味に取れる. つまり,

(a)「任意の x に対して | $p(x, y)$ が成り立つ y が存在する」という区切りで読めば, $\forall x \exists y[p(x, y)]$ の意味で読める. x の相方 y は x に応じて変わってもよい.

(b)「任意の x に対して $p(x, y)$ が成り立つ | y が存在する」という区切りで読めば, $\exists y \forall x[p(x, y)]$ の意味で読める. これは全ての x に共通する特定の相方 y が存在するという意味である.

これも複数の解釈が可能で曖昧な文章の一例であるが, (b) の意味を明確にしたいときには,「ある y が存在して, 全ての x について $p(x, y)$ が成り立つ」のように (1) で見た英語式語順の方が誤解の可能性が少ない.

2.3 de Morgan 則

量化子が入った文言の否定には, 次の **de Morgan 則**が基本的である:

de Morgan 則

$$\overline{\forall x[p(x)]} \equiv \exists x\overline{[p(x)]}, \tag{5}$$

$$\overline{\exists x[p(x)]} \equiv \forall x\overline{[p(x)]}. \tag{6}$$

これは定理 1.6 で述べた de Morgan 則の一般化に当たり, $\forall$ と $\exists$ の意味を考えれば至極自然である. ただし, こちらは x が無限個の値を取り得る場合は, 真理値表を作成して証明できるなどという代物ではない. 全称命題および存在命題の否定を形式的に定義した約束事だと割り切ってしまおう.

◆ **例 2.6**　名探偵漫画でよく見る「犯人はこの中にいる!」というシーンを考えてみよう. x はこの場にいる人物たちを動くとして, $p(x)$ は「x は犯人である」という意味だとすると,「犯人はこの中にいる!」という台詞は $\exists x[p(x)]$ という存在量化子を用いた表現である. もちろん, 2 人以上が共謀している場合もあるので, x は一つとは限らない. 犯人が 2 人以上いても $\exists x[p(x)]$ は真である.

探偵の主張に反論するとなると, $\exists x[p(x)]$ を否定しなければならない.「犯人はこの中にいる!」の否定はもちろん「犯人はこの中にいない」だが, これは要するに「ここにいる人は誰も犯人ではない」ということなので, 論理記号で書けば $\forall x\overline{[p(x)]}$ というように全称量化子を用いた表現になる. つまり, この場にいる全てのメンバー x について, x が犯人だという主張を否定しなければならない. ちなみに, $\exists x\overline{[p(x)]}$ は「この中には犯人でない人がいる」という意味なので, **ある一人を除く全てのメンバーが犯人である**という極端な場合もあり得る. □

◆ **例 2.7**　実数 a が**代数的** (algebraic) であるとは, 有理数を係数とする定数でないある多項式 $f(x)$ について $f(a)=0$ であることを言う. a が代数的でないとき, a は**超越的** (transcendental) であると言う.

f が有理数係数の定数でない多項式を表すとき, a が代数的であることの定義は $\exists f[f(a)=0]$ である. したがって, a が超越的であることは, de Morgan の法則から

$$\overline{\exists f[f(a)=0]} \equiv \forall f\overline{[f(a)=0]} \equiv \forall f[f(a)\neq 0]$$

と書ける. これは「有理数係数のどんな非定数多項式 $f(x)$ についても $f(a)\neq 0$ である」という意味である.「f が有理数係数の定数でない多項式である」という部分は f に課せられた前提であり, そこは否定の対象ではない.

有理数は全て代数的である. (a が有理数ならば, $f(x)=x-a$ は有理数係数の定数でない多項式であり, $f(a)=0$ である.) これの対偶から, 超越数は全て無理数である. $\sqrt{2}$ は無理数であるが, $f(x)=x^2-2$ の根なので代数的である. このように, 無理数であることは超越数であるための必要条件ではあるが, 十分条件ではない. □

◆ **例 2.8**　ある学校の生徒 x とスポーツ種目 u に関する命題関数 $p(x,u)$ を「x は u が得意である」とすると, $\forall u\exists x[p(x,u)]$ は「どの種目 u にも, それが得意な生徒 x がいる」という意味である. それの否定は,「全ての生徒が苦手とする種目がある」という意味になる. 例えば,「この学校の生徒はなぜか全員バレーボールが苦手だ」というような場合が該当する. 形式的には, de Morgan の法則を 2 回使って,

$$\overline{\forall u\exists x[p(x,u)]} \equiv \exists u\overline{\exists x[p(x,u)]} \equiv \exists u\forall x\overline{[p(x,u)]}$$

となる. □

▶ **演習 2.3**　実数列 x が実数 a に収束することの定義 (→例 2.2) の否定条件を考えることで, x が a に「収束しない」ことの定義を述べよ.

3　集合と部分集合

集合とは, その字義通り, 物 (オブジェクト) の集まりのことである. 単に物が集まっただけというシンプルな概念であるが, 集合の概念は現在では数学のあらゆる分野に共通する一つの**公用語**になっている. (集合が数学の公用語として都合がいいことには, それが古典論理と極めて相性がいいという事情も大きい.) 本節

および次節で学ぶ集合論も, 前節までに学んだ古典論理と共に数学の公用語として働く集合論の一番基本的なところである.

3.1 集合と元

集合とは, 数学で考察対象となる物の集まりである. 数学に現れるオブジェクトと言っても, それは数に限定されるわけではなく, いくつかの約束事さえ踏まえておけば, どんなものでも集合を構成するオブジェクトになり得る. 素朴集合論の創始者 Georg Cantor の言葉を借りれば,「我々の直観あるいは思考の明確な対象で, 互いに区別されるもの」であれば, それらが集まることで集合が形成される. 実は, あまり無節操に物の集まりを何でも集合と認めるわけにもいかないが, その話は後の第 5 節で軽く触れることにして, しばらくはあまりやかましいことは考えないで先に進もう.

集合 A の構成要素を A の**元** (げん) とも言う. x が A に属することを

$$x \in A, \text{ あるいは } A \ni x$$

と書き, これの否定, つまり x が A に属さないことを $x \notin A$ または $A \not\ni x$ で表す. 以下では, **どの x と集合 A についても, $x \in A$ または $x \notin A$ のうちどちらか一方だけが成立する**と約束しておく. 例えば,「美しい花の集合」「おいしいお菓子の集合」「おもしろい芸人の集合」のような定義が曖昧なものは考慮に入らない. このように, **定義が曖昧ではなく, 集合が指定する対象物の範囲がはっきりしている**ということは集合に関する約束事である. もちろん, 何をもって「曖昧ではない」「はっきりしている」と言うのかがそれこそ曖昧なままだが, そこは素朴に理解しておいていただきたい. (それが '素朴' 集合論たる所以である.)

補足 3.1 具体的に集合 A とオブジェクト x を持ってきたときに, $x \in A$ であるか $x \notin A$ であるかが容易に分かるかどうかということは, また別の問題である. 例えば, A を無理数の全体, $x = \pi^\pi$ ($\pi = 3.14159\cdots$ は円周率) とするとき, 原理的には $x \in A$ であるか $x \notin A$ のいずれかちょうど一つが成り立つことは明白であるが, 実際にそのどちらであるかを見極めるのは簡単なことではない. 実際, $x \in A$ であるかどうかは未だ判明していない. □

補足 3.2 $x \in A$ という記述は, もちろん「x が集合 A に所属している」ことを意味するが, これとはやや違う使われ方をすることもある. 例えば,「任意の $x \in A$ に対して〜」という言い方がよくあるが, ここでは $x \in A$ は「x が A に属している」と読むよりも,「A に属する任意の x」と読むべきところである. □

数学でよく出てくる集合には, 表 7 のように特別な記号が断り無く使われるので, この際に覚えてしまおう. これらの集合のように, 無限に多くの元を持つ集合を**無限集合**と呼ぶ. それに対して, 元が有限個である集合を**有限集合**と呼ぶ. ここで「有限」「無限」の定義は必ずしも明確ではないが, しばらくの間は素朴な理解のままで十分である.

集合 A に対して, $|A|$ は A の**大きさ**, つまり A が持つ元の個数を表すものとする. $|A|$ の代わりに, $\#A$ などの他の記号を使うこともある. A が無限集合のときは $|A| = \infty$ と書く.

表 7　よく出てくる集合の例.

記号	意味	由来
$\mathbb{N}$	自然数の全体	英: Natural number
$\mathbb{Z}$	整数の全体	独: Zahl (数; 英語では Integer)
$\mathbb{Q}$	有理数の全体	英: Quotient number (Rational number の代用)
$\mathbb{R}$	実数の全体	英: Real number
$\mathbb{C}$	複素数の全体	英: Complex number

3.2　集合の表記法

集合を表記する一つの方法は, その構成要素を全て列挙することである. 例えば, A を 20 以下の正の素数の全体とするとき,

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \tag{7}$$

と書く. ここで特に断りがない限り, **要素の順番や重複などは一切気にしない**. あくまでどんな要素がそこに属しているかという情報だけが重要である. 例えば,

$$\{7, 3, 17, 2, 11, 2, 5, 11, 19, 13, 7\}$$

は式 (7) と同じ集合 A を表す.「1 から 100 までの自然数の集合 B」のように要素が多い場合は,

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$$

のように, 誤解のない範囲で途中を省略して書く. 元が集合に所属するための条件を明記したい場合には,

$$X = \{x \mid P(x)\} \tag{8}$$

で「X は条件 $P(x)$ を満たす x の全体である」という意味を表す.*[14] ここに使われる文字 x は単なるプレースホルダであり, 他の文字に置き換えても効果は同じである. 例えば, 式 (7) の集合 A は

$$A = \{x \mid x \text{ は 20 以下の正の素数である}\}$$

とも書けるが, ここで x を y などの他の文字に置き換えてもよい.「Y は条件 P を満たす何らかの x を用いて $y = f(x)$ と表される y の全体である」と言う場合は,

$$Y = \{y \mid \text{条件 } P \text{ を満たす } x \text{ が存在して, } y = f(x) \text{ と表される}\}$$

などと書けばよいが, これを手短に次のような形式で書くこともある:

$$Y = \{f(x) \mid P(x)\}.$$

ここで, $P(x)$ は「x に対して条件 P が成り立つ」ことを意味する記述である. 例えば,

$$Y = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

は平方数の全体を表す. ここで, $x = 2$ と $x' = -2$ のどちらに対しても $x^2 = 4 = x'^2$ となっているが, だからといって Y に 4 が 2 個含まれるということにはならない.

式 (8) のような記述は集合の**内包的記述**と呼ばれるが, 実は全ての内包的記述がすべからく集合を定義するわけではない. そのことについては, 第 5 節で簡単に触れよう.

*[14] 区切り記号として, 縦線 | の代わりにコロン : など他の記号が用いられることもある.

☕ Coffee Break ☕

記号に惑わされないこと

素朴集合論では, 集合は $A, B, C, \ldots$ などの大文字で, 元は $x, y, z, \ldots$ などの小文字で, それぞれ書かれることが多い. しかし, そういった厳格な決まりがあるわけではないので, 大文字・小文字に惑わされすぎるのも良くない. **集合なのか, それとも一つの元なのか, それは前後の文脈や記号の使われ方に沿って注意深く判断すべきこと**である. 例えば, $A \in x$ と書いてあれば, (それが $A \ni x$ の書き間違いでない限り) x が集合であり, A はそれに属する要素である.

♦ **例 3.3** (1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ は, 実数 x のうち, $x \notin \mathbb{Q}$ となるものの全体である. $x \notin \mathbb{Q}$ は「x は有理数ではない」と言う意味なので, 要するにこれは無理数の全体である.

(2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ は, $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たす実数 x の全体であるが, そのような x は 1 と 2 だけなので, この集合は $\{1, 2\}$ と同じである.

(3) $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ はある整数 n を用いて $2n$ と表される整数の全体, つまり偶数の全体である. 同じように, $\{1 + 2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は奇数の全体を表している. なお, 代数学をはじめとして数学でよく使う記法であるが, 整数 n に対して n の倍数の全体を $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ で表す.

(4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ は 2 次元座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 (x, y) で $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たすものの全体, つまり原点を中心とする半径 1 の円の内部および円周上にある点の全体である. □

♦ **例 3.4** $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とおく. A は整数 n に渡る値 $f(n) = 2n^2 + 3n - 2$ らを全て集めて作られる整数の全体集合である. 例えば, $n = 3$ に対する $f(3) = 25$ や, $n = -1$ に対する $f(-1) = -3$ などが A の要素である.

$1/2$ は整数ではないので, $f(1/2) = 0$ は A の要素ではないのだろうか? そうではない. $f(-2) = 0$ だから, 実際は $0 \in A$ である. **A の定義は, 整数でない n に対しては $f(n) \notin A$ であるとは言っていない**.

$4 \in A$ であるとすると, $4 = f(n) = 2n^2 + 3n - 2$ となる整数 n が存在するはずだが, この式を満たす整数 n は存在しない. よって, $4 \notin A$ である. □

補足 3.5 ここで説明したように, 普通は $A = \{1, 2, 3\}$ と $A' = \{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ は同じ集合として扱われる. しかし, 元の重複具合も考慮に入れて A と A' を区別したいこともあり得る. このように, 元の重複具合も考慮に入れた集合を特に**多重集合**と言う. A' では 1 が 2 回現れているので, 1 の**重複度**は 2 であると言う. 上記の A と A' では元の多重度が違っているので, 両者は多重集合としては互いに区別される. 例えば, $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ は普通の集合としては $\{1\}$ であるが, 重複度も込めて多重集合として考えれば $\{1, 1\}$ である.

集合は単なる集団であり, その元を列挙する際に順番はどうでもいい. つまり, 集合はそこに何が属していて何が属していないかという情報しか持っておらず, 元の順番に関する情報は持っていない. しかし, 元の順番も考慮したい場面もある. 例えば, 数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ は単に数が集まっただけの集団ではなく, 数が順番に並んだものとして認識される. このように, 元の順番を意識した集合は**列**として扱われる. 列は集合というよりもむしろ写像 (関数) として考える方が適切である. □

▶ **演習 3.1** 次の集合をそれぞれ式で表せ. (ただし, 表記方法は必ずしも一つとは限らない.) また,

それに属する元と属さない元の例をそれぞれいくつか挙げよ.

(1) 20 以下の自然数で, 2 つの相異なる素数の和で表されるものの全体 A.
(2) (a, t を実数とするとき) 初項が a, 公差が t の等差数列に現れる実数の全体 B.
(3) 複素数のうち, 実部と虚部が共に整数であるものの全体 C.
(4) 座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点のうち, 格子点からの直線距離が 1/4 以下である点の全体 D. ここで「格子点」とは, x-座標と y-座標がどちらも整数である点のことを言う.

▶ **演習 3.2**　次の集合の定義をそれぞれ言葉で説明せよ. また, それに属する元の例, 属さない元の例をそれぞれいくつか挙げよ.

(1) $A = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(2) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n, n+2 \in P\}$. ここで, $P = \{2, 3, 5, \dots\}$ は素数の全体を表す.
(3) $C = \{x \mid \forall n[x_{n+1} \le 2x_n]\}$. ここで, x は実数列を表しており, x_n はその第 n 項を表している.

3.3　部分集合

図 2(i) のように, 集合 A が集合 B の一部分をなすとき, A を B の部分集合と言う. A が B の一部分であるということをより正確にとらえると, 次の定義が浮かび上がる.

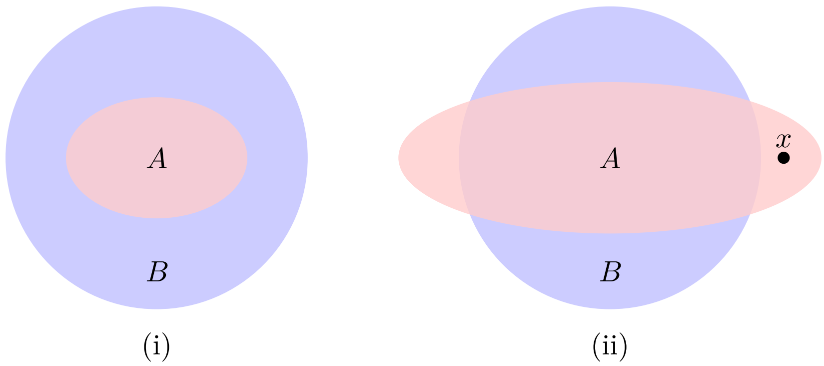


図 2　(i) $A \subseteq B$ である例と (ii) $A \subseteq B$ でない例.

部分集合

定義 3.6. 集合 A の全ての要素が集合 B の要素でもあるとき, A は B の**部分集合**であると言い,

$$A \subseteq B \quad \text{または} \quad B \supseteq A$$

と書く.

つまり, $A \subseteq B$ であることは, どんな x についても

$$x \in A \to x \in B \tag{9}$$

が成り立つということである. 図 2(ii) のように, $x \in A$ であるが $x \notin B$ だという x が一つでも存在する場合は, $A \not\subseteq B$ である. A, B がそれぞれ命題関数 $a(x)$, $b(x)$ を用いて

$$A = \{x \mid a(x)\}, \quad B = \{x \mid b(x)\}$$

☕ Coffee Break ☕

含む・含まれる

$\in$ と $\subseteq$ はどちらも「含む」「含まれる」という意味であるが, $\in$ **は集合への所属を表し,** $\subseteq$ **は集合間の包含関係を表す**という明確な違いがある. 例えば, $3 \in \mathbb{N}$ とは書くが $3 \subseteq \mathbb{N}$ とは書かないし, $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ とは書くが $\{1,2\} \in \{1,2,3\}$ とは書かない. $3 \in \mathbb{N}$ と $\{3\} \subseteq \mathbb{N}$ は正しい式であり, 実質的な意味は同じである.

$\subsetneq$ と $\not\subseteq$ でも意味が違う. $A \subsetneq B$ は「A は B の部分集合だが $A = B$ ではない」という意味であり, $A \not\subseteq B$ は「A は B の部分集合ではない」という意味である. 例えば, $\{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$, $\{1,2\} \not\subseteq \{1,3\}$ である. **記号の微妙な違いに注意しておこう**. 記号を正しく使うことも大切なことである.

$x \in A \subseteq B$ は $x \in A$ と $A \subseteq B$ を合わせた書き方であり,「x は集合 A の要素であり, その集合 A は集合 B の部分集合である」という意味である. (よって, 特に $x \in B$ でもある.) 本シリーズの中でも所々で使っている記法であるが, **あまり行儀がよろしくない手抜き記法**である.

と定められているときには, $A \subseteq B$ であることは, $\forall x[a(x) \to b(x)]$ が真であることと同じである.

部分集合に関する注意点をいくつか挙げておこう.

- B は B 自身の部分集合である. つまり, **「全体」は「部分」の特別な場合である**.[*15]
- B の部分集合 A で B 自身以外のものを**真部分集合**と呼び, $A \subsetneq B$ と書く. ここで言う $A \subseteq B$ を単に $A \subset B$ と書き, 特に $A \neq B$ であることを強調するときに $A \subsetneq B$ と書く文献も多いが, 本シリーズでは「全体は部分の特別な場合である」ことを意識して, 部分集合の記号としては $\subset$ ではなく $\subseteq$ を用いている.
- 包含関係は推移的に伝搬する. つまり, $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば, $A \subseteq C$ である.
- A, B が一致するのは, 両者が全く同一の元から成るとき, つまり任意の x について $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ である場合である. したがって, 式 (9) から次の同値が成立する:

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A). \tag{10}$$

♦ **例 3.7** 表 7 で挙げた 5 つの集合について, $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ である. □

♦ **例 3.8** A を整数係数多項式の全体とし, B を全ての整数 n について $f(n)$ が整数となる多項式 f の全体とする. $f \in A$ とすると, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ ($a_0, \ldots, a_d$ は全て整数) と書けるので, 任意の整数 n について $f(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d$ も整数である. よって, $A \subseteq B$ である. $f(x) = x(x+1)/2$ は係数に $1/2$ を持つから $f \notin A$ であるが, 一方でどの整数 n についても n, $n+1$ のうち一方は必ず偶数だから, $f(n) = n(n+1)/2$ は整数であり, $f \in B$ である. よって, $A \subsetneq B$ である. このことは, 例 1.23 において M1 が M2 のために十分な条件であるが, 必要な条件ではないことを反映している. □

♦ **例 3.9** $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \leq 3/4\}$ とおく. ($\mathbb{R}^2$ は 2 次元座標平面を表す.) $(1/5, 4/5)$ は A に属するが B には属さないので, $A \not\subseteq B$ である. 一方で, $(3/4, 3/4)$ は B に属するが A には属さないので, $B \not\subseteq A$ である. よって, A, B の間には包含関係はない. □

[*15] これは数学全体に通底する考え方であり,「部分〜」と言う場合には全体をその特別な場合として考えることがほとんどである.

2 つの集合 A, B が一致することを示すには, 式 (10) に従って $A \subseteq B$ と $B \subseteq A$ をそれぞれ個別に証明することが基本であるが, これは数の場合で言えば $a \leq b$ かつ $b \leq a$ であることを示すことで $a = b$ であることを示すことに似ている. 実例を見ておこう.

♦ **例 3.10**　A を偶数の全体, B を 2 つの相異なる奇数の和で表される整数の全体とする. 任意の $b \in B$ は相異なる奇数 $x = 2x' + 1$, $y = 2y' + 1$ を用いて $b = x + y = 2(x' + y' + 1)$ と書けるので, $b \in A$ である. よって, $B \subseteq A$ である. 一方, 任意の $a \in A$ に対して (i) $a/2$ が偶数ならば $x = a/2 - 1$, $y = a/2 + 1$ とおき, (ii) $a/2$ が奇数ならば $x = a/2 - 2$, $y = a/2 + 2$ とおけば, いずれの場合も x, y は相異なる奇数であり, $a = x + y$ なので, $a \in B$ である. よって, $A \subseteq B$ でもある. ゆえに, $A = B$ である. □

2 つの集合が一致することを示す別の事例として, 次の例を挙げておこう.

♦ **例 3.11**　P を $\mathbb{N}$ の部分集合とする. P について次の 2 つの条件が成り立っているとする:

(1) $1 \in P$ である.
(2) 任意の自然数 $n \geq 2$ について: $n - 1 \in P$ ならば, $n \in P$ でもある.

このとき, $P = \mathbb{N}$ であることを示そう. 背理法を用いる. $P \neq \mathbb{N}$ であると仮定する. すると, 自然数の中で P に属さないものが少なくとも一つは存在する. そのような自然数のうちで最小のものを n とする. $n \notin P$ であるが, 条件 (1) から $1 \in P$ なので, $n \neq 1$ である. つまり, $n \geq 2$ である. n は P に属さない最小の自然数なので, $n - 1$ は P に属している. ところが, そうすると条件 (2) から $n \in P$ となってしまい, $n \notin P$ であることに矛盾する. 以上から, $P = \mathbb{N}$ である. □

上の例 3.11 は**数学的帰納法**の原理を説明している. 高校数学でもお馴染みの通り, 数学的帰納法は自然数 n に関する命題関数 $P(n)$ が全ての自然数 n について真であることを証明する際に, 次の 2 つのことを証明する論法である:

- **基本ステップ**: $P(1)$ が正しいことを証明する.
- **帰納ステップ**: ($n \geq 2$ のとき) $P(n-1)$ が正しいならば, $P(n)$ も正しいことを証明する.

$P(n)$ が真となる自然数 n の全体を P とすると, これら 2 つのステップがそれぞれ, 例 3.11 の条件 (1) と条件 (2) が成り立つことを証明することに対応している. したがって, これら 2 つのステップが正しく示されれば, 例 3.11 から $P = \mathbb{N}$ であること, つまり $P(n)$ が全ての n に対して正しいことが結論できる.

▶ **演習 3.3**　A を実数を成分とする 2 次正方行列 a でどの整数縦ベクトル $u \in \mathbb{Z}^2$ に対しても au が整数ベクトルであるものの全体とする. また, B を整数成分の 2 次正方行列の全体とする. $A = B$ を示せ.

▶ **演習 3.4**　集合 $A = \{f(\sqrt{2}) \mid f \in P\}$ と集合 $B = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ は等しいことを示せ. ただし, P は整数係数多項式の全体である.

☕ Coffee Break ☕

数学的帰納法とその限界

数学的帰納法は, 素朴に理解すれば**ドミノ倒し論法**である. 例えば, $P(20)$ が正しいことを主張するには, 帰納ステップから $P(19)$ が成り立てばよく, その $P(19)$ が成り立つためには同じく帰納ステップから $P(18)$ が成り立てばよく…と遡って行けば, 最後に $P(1)$ が成り立つことに全てが掛かっていることがわかる. そして, $P(1)$ が正しいことは基本ステップで示してあるので, 結局は $P(20)$ が正しいと言えるという理屈である.

この論法を用いれば, 自然数 n に関する命題 $P(n)$ が全ての自然数 n について成り立つことを証明できる. n が有限である限りは, $P(n)$ から出発して**有限回**のドミノ倒しで必ず $P(1)$ まで到達できるからである. ただし, **数学的帰納法では $n = \infty$ に対する $P(n)$ の正しさまでは証明されない**ことに注意しておこう. $P(\infty)$ が正しいことを言うには, 無限の彼方からドミノ倒しを始めなくてはいけないことになるが, そんなことはできない.

3.4　空集合

集合の特別なものとして, 要素を全く持たない空箱に相当する集合を考える. それを**空集合**と呼び, $\emptyset$ と書く.[*16] あえて書けば, $\emptyset = \{\ \}$ ということである. (中身がからっぽ.)

集合 A の部分集合は A から一部の元を取り除くことで得られる. ここで特に, A からその全ての元を取り除けば, 後に残るのは空集合である. したがって, **空集合は任意の集合の部分集合である**と考えるのが自然である. 論理的には次のように考えることができる. どんな x についても, $x \in \emptyset$ は偽であるから,

$$x \in \emptyset \to x \in A$$

は**空虚に**真である. したがって, $\emptyset \subseteq A$ である. 特に, $\emptyset$ は $\emptyset$ 自身の部分集合である. $\emptyset$ の部分集合は $\emptyset$ 自身のみである.

空集合は $|\emptyset| = 0$ となる唯一つの集合である. 空集合の次に要素が少ない集合は $\{x\}$ のように単独の元だけから構成される集合であるが, このような集合を**単元集合**と言う.

♦ **例 3.12**　$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は有理数かつ無理数である$\}$ は空集合である. これはもちろん, 有理数と無理数が互いに排反な概念 (両立しない概念) であることによる. □

♦ **例 3.13**　$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$ は $x^2 = 2$ を満たす有理数 x の全体であるが, そのような有理数は存在しないので, $X = \emptyset$ である. 一方で $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$ は空集合ではなく, $Y = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ である. この例では, 単に $\{x \mid x^2 = 2\}$ と書いただけでは, x の範囲が明確でないので意味がはっきりしない. □

♦ **例 3.14**　自然数 n に対して, $F_n = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{N}, x^n + y^n = z^n\}$ とおく. $n \geq 3$ のときに $F_n = \emptyset$ であることを主張するのが有名な **Fermat の最終定理**である.[*17] F_1, F_2 は空集合ではないどころか無限集合である. □

[*16] この記号はノルウェー語のアルファベットに由来する記号であり, ギリシャ文字の ϕ とは別物である.
[*17] これは未解決の難問の一つとして永らく有名であったが, Fermat の死後 300 年以上経って, 1995 年に Andrew Wiles によってようやく最終解決に至った.

☕ Coffee Break ☕

定義に現れる「空虚な真」

空集合が全ての集合の部分集合であることは, 論理的には空虚な真のルールで説明できるが, このように空虚な真のルールは集合や数学的概念の定義に関連して現れることがしばしばある.

例えば,「$\mathbb{N}$ の部分集合が '素集合' であるとは, $\mathbb{N}$ に属する奇数が全て素数であることを言う」という定義があるとき, $\mathbb{N}$ の部分集合 A がそもそも奇数を全く含まない場合には A は素集合だろうか? A が素集合であることの定義は, どんな自然数 x についても

(P)　$x \in A$ かつ x が奇数 $\to x$ は素数

が真ということだが, A が奇数を全く含まない場合には (P) の仮定部分は常に偽なので, (P) 全体としては空虚に真であり, よって A は素集合である.

▶ **演習 3.5**　次の集合のうちで空集合であるものはどれか? 空集合でないものについては, それに属している元を具体的に一つ挙げよ.

(1) $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid$ どの整数 x, y についても $5x + 13y \neq z\}$.
(2) $B = \{z \in \mathbb{N} \mid$ どの自然数 x, y についても $4x + 7y \neq z\}$.
(3) $C = \{z \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid$ ある正則でない $x, y \in M_2(\mathbb{R})$ について $z = xy\}$. ただし, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は実数成分の 2 次正則行列の全体, $M_2(\mathbb{R})$ は実数成分の 2 次正方行列の全体である.

3.5　集合族

集合を集めて, より大きな単位としての集合を考えることができる. このように, 集合を構成要素とする集合を特に**集合族**と呼ぶことがある. 要素自身がまた一つの集合であるというだけで, **集合族も一つの集合であることに変わりはない**. 集合族は慣習的に $\mathcal{C}$ などの特別なフォントで記述されることが多いが, そのような厳格な決まりがあるわけではない.

◆ **例 3.15**　2025 年現在, サッカー J1 リーグには 20 個のクラブがあるが, それらの全体は

$$J_1 = \{\text{鹿島アントラーズ}, \text{浦和レッズ}, \dots, \text{アビスパ福岡}\}$$

である. (全部書くのはしんどいので, 途中を省略した.) ここで, J_1 の各々の要素を, そこに所属している全ての選手から成る集合と見なせば, J_1 は一つの集合族である. この場合でも, J_1 の要素は 20 個それぞれの「クラブ」であり, それぞれのクラブの所属選手は J_1 から見れば孫要素に当たる. □

◆ **例 3.16** (冪集合)　集合 A の全ての部分集合から成る集合族を A の**冪集合** (べき集合) と言い, 2^A で表す. ($\mathfrak{P}(A)$ など他の記法が用いられることもある.) 例えば, $A = \{1, 2, 3\}$ のときは,

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

である. **空集合 $\emptyset$ と $A = \{1, 2, 3\}$ 自身も 2^A のメンバーである**ところが注目ポイントである. 一般に, $|A| = n$ であるとき, A の部分集合は 2^n 個存在する.[*18] これが 2^A という記法の由来である. □

*18 A の部分集合を作るとき, A のそれぞれの元に対して, その部分集合に「含まれる」「含まれない」の 2 通りの選択肢があるか

冪集合 2^A は A の全ての部分集合から構成される集合族なので，

$$S \subseteq A \iff S \in 2^A$$

である．

♦ **例 3.17** (1) $\{\emptyset\}$ は空集合 $\emptyset$ を要素に持つ集合族である．$\{\emptyset\}$ には $\emptyset$ という要素が一つあるので，$\{\emptyset\}$ は空集合ではない．$\{\emptyset\}$ は $\emptyset$ の冪集合であり，「一つの空箱が格納されている箱」であって，それ自身は空箱ではない．

(2) $\{1\}$ と $\{\{1\}\}$ は相異なる集合である．後者は $\{1\}$ という一つの集合を要素とする集合族であるが，前者は 1 という一つの自然数から成る集合である． □

集合族を抽象的に記述するときに，それに属する集合に適当な添字 (番号的なもの) を付けて，$\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ と書くことがある．例えば，$I = \{1, 2, 3\}$ のとき，これは集合族 $\{C_1, C_2, C_3\}$ を表している．$\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と書いた場合，各々の自然数 n に対して集合 C_n が指定されていて，$\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はそれら全ての C_n から構成される集合族を表している．ここで特に集合の並び順を考慮に入れる場合は，これは集合の列

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$$

を表していると考えられる．一般に添字集合 I はどんな集合であってもよく，それが無限集合であってもよいし，自然数など数から成る集合である必要もない．

なお，集合族の添字表記 $\{C_i\}_{i\in I}$ においては，相異なる添字 $i, j \in I$ に対して $C_i = C_j$ となることは必ずしも排除されない．集合族 $\{C_i\}_{i\in I}$ のことを，各添字 $i \in I$ を集合 C_i に変換する「関数」と見なした方がスッキリする場合もある．

▶ **演習 3.6** 任意の集合 A, B について，$A \subseteq B \iff 2^A \subseteq 2^B$ であることを示せ．

4 集合の演算

この節では，集合から新たな集合を作り出す**集合の演算**について学習する．ここで学ぶ集合の演算は，古典論理で言えば「かつ」「または」「〜でない」という基本的な論理演算と密接に関わっており，それらを集合の言葉で言い直したものであると言ってもよい．

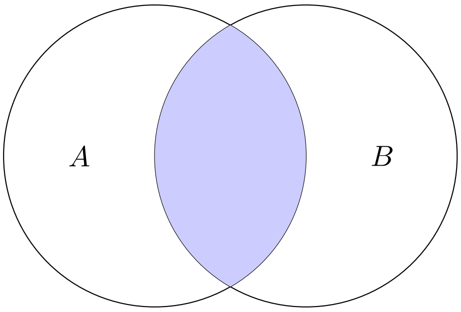
4.1 和集合と共通部分

集合 A と B に対して，

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \land x \in B\},$$
$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

をそれぞれ A, B の**共通部分**, **和集合**と呼ぶ (図 3)．共通部分を**交わり**, 和集合を**合併集合**と言うこともある．特に，和集合 $A \cup B$ の定義で，$x \in A \lor x \in B$ であることには，$x \in A \land x \in B$ であることも含まれている (→表 1)．つまり，図 3 のように $A \cap B \subseteq A \cup B$ である．

らである．



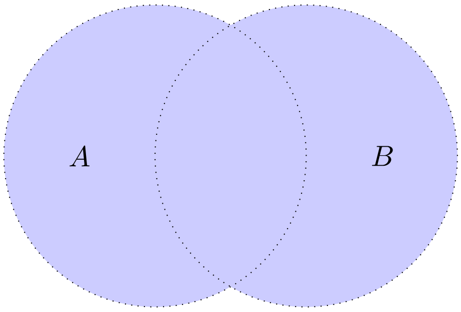


図 3 (左) 共通部分 $A \cap B$ と (右) 和集合 $A \cup B$.

♦ **例 4.1** $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$ とするとき,

(1) $A \cap B$ は A と B に共通する元の全体なので, $A \cap B = \{3\}$ である.
(2) $A \cap C$ は A と C に共通する元の全体であるが, そのような元は全く存在しないので, $A \cap C = \emptyset$ である. このことを指して, A と C は**交わらない**, あるいは**互いに素**であると言う.
(3) $A \cup B$ は A, B の少なくとも一方に属する元の全体なので, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ である. A, B の両方に属する 3 もこの中に入っている.

命題 4.2. 任意の集合 A, B, C, D について,

(1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ である.
(2) $A, B \subseteq C$ ならば, $A \cup B \subseteq C$ である.
(3) $C \subseteq A, B$ ならば, $C \subseteq A \cap B$ である.
(4) $A \subseteq B$ ならば, $A \cap C \subseteq B \cap C$, $A \cup C \subseteq B \cup C$ である.
(5) $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ ならば, $A \cap B \subseteq C \cap D$ かつ $A \cup B \subseteq C \cup D$ である.

証明. どれも感覚的には明らかなものばかりだろう. ここでは (5) の証明だけを示しておき, 後は各自に任せる.

$A \cap B \subseteq C \cap D$: 任意の $x \in A \cap B$ について, $x \in C \cap D$ でもあることを示せばよい. $x \in A \cap B$ だから, $x \in A$ かつ $x \in B$ である. $x \in A$, $A \subseteq C$ だから, $x \in C$ である. 同じく, $x \in B$, $B \subseteq D$ だから, $x \in D$ でもある. よって, $x \in C \cap D$ である.

$A \cup B \subseteq C \cup D$: 任意の $x \in A \cup B$ について, $x \in C \cup D$ でもあることを示せばよい. $x \in A \cup B$ なので, $x \in A$ または $x \in B$ である.

- $x \in A$ であるとき: $A \subseteq C$ でもあるから, $x \in C$ である.
- $x \in B$ であるとき: $B \subseteq D$ でもあるから, $x \in D$ である.

よって, いずれにせよ $x \in C$ または $x \in D$ となるので, $x \in C \cup D$ である. □

命題 4.3. $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ ならば, $x \in B$ である.

証明. $x \in A \cup B$ なので, $x \in A$ または $x \in B$ のうち少なくとも一方は成立するが, 仮定から $x \in A$ は成立していないので, $x \in B$ でなければならない. □

これは, 命題論理で言えば $(x \vee y) \wedge \bar{x} \Rightarrow y$ が恒真式であること (選言三段論法) と同じ構造の理屈であ

り, 和集合を扱うときにしばしば用いられる.

命題 4.4. 任意の集合 A について, $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$, $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ である.

証明. $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$ であるが, $\emptyset$ の部分集合は $\emptyset$ のみなので, $A \cap \emptyset = \emptyset$ である. $\emptyset \cap A = \emptyset$ であることも同様である. 任意の x について, $x \notin \emptyset$ であることから, 命題 4.3 を用いて

$$x \in A \cup \emptyset \iff x \in A \vee x \in \emptyset \iff x \in A$$

となる. よって, $A \cup \emptyset = A$ である. $\emptyset \cup A = A$ であることも同様である. □

命題 4.5. A, B, C を任意の集合とするとき,

(1) **交換則**: $A \cap B = B \cap A,\ \ A \cup B = B \cup A$.
(2) **結合則**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
(3) **吸収則**: $A \cap (A \cup B) = A,\ \ A \cup (A \cap B) = A$.
(4) **冪等則**: $A \cap A = A,\ \ A \cup A = A$.
(5) **分配則**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

これらは, 命題 1.2 で $\wedge$ を $\cap$ に, $\vee$ を $\cup$ にそれぞれ読み替えて, さらに F を集合への非所属, T を集合への所属を表すものと解釈したものと理解できる.

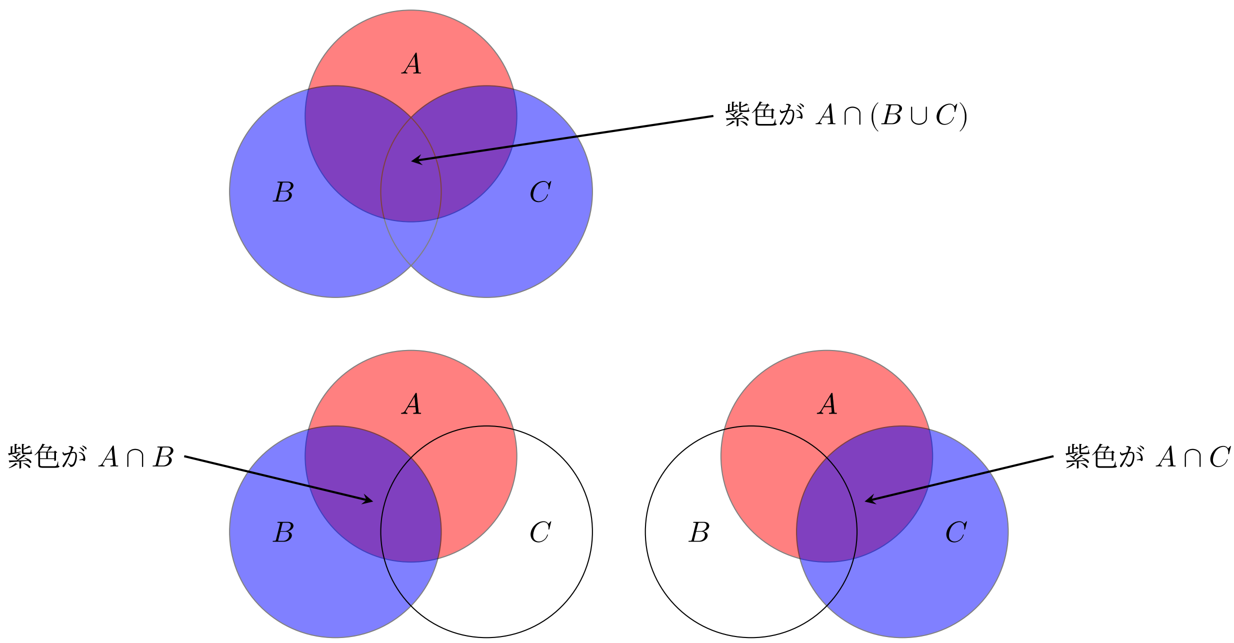


図 4　命題 4.5(5) のイメージ.

図 4 に分配則 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ のイメージ図を載せておく. 定義に立ち返って正確に証明するならば, 式 (10) に従って次の 2 つの包含をそれぞれ個別に証明すればよい:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{11}$$
$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{12}$$

ここでは, 参考のために式 (11) の証明を少し詳しく記述しておく. 式 (12) の証明も同じようにしてできるので, それは演習問題に残しておく (→演習 4.3).

☕ Coffee Break ☕

集合演算公式のイメージを作ってみる

集合演算に関する基本的な公式は直観的にも意味が取りやすいものが多いので, いちいち丸暗記する必要はない. 分配法則 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ はやや分かりにくいかも知れないが, これのイメージを理解したければ, 次のような具体例を作って考えてみればいい.

ある高等学校の生徒全体を考えて, B をサッカー部員の全体, C を軽音楽部員の全体として, A を 1 年生の全体とする. すると, $B \cup C$ はサッカー部か軽音楽部かの少なくとも一つに所属している生徒の全体だから, $A \cap (B \cup C)$ は「サッカー部か軽音楽部に所属している 1 年生の全体」である. 一方, $A \cap B$ はサッカー部の 1 年生の全体, $A \cap C$ は軽音楽部の 1 年生の全体であり, その両者を合わせれば「サッカー部か軽音楽部に所属している 1 年生の全体」として $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ が得られる. 同様にして, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を説明するイメージを自分で考えてみよう.

このようなイメージはもちろん数学的に正式な証明ではないが, 上手に活用すれば理解の大きな助けになる. もっとも, このようなイメージ的理解がそう簡単に通用しない場面も多々ある. **定義に従った論理的な議論ができるようになることもやはり大切である.**

証明すべき事項は, 集合 $A \cap (B \cup C)$ が集合 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ の部分集合であるという包含である. 部分集合の定義 3.6 に立ち返ると, 次のことを証明すればよいことになる:

任意の $x \in A \cap (B \cup C)$ が, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ に属していること.

そこで, $A \cap (B \cup C)$ の任意の元 x を考える. 目標は x が $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ に属していることを証明することである. $\cup$ の定義によれば, x が $A \cap B$ または $A \cap C$ のうち, 少なくともいずれかに所属していることを示せばよい. もちろん, $A \cap B$ と $A \cap C$ の両方に所属してもよい.

$\cap$ の定義によれば, この x は A と $B \cup C$ の両方に所属している. 特に, $x \in B \cup C$ であるが, $\cup$ の定義によれば, x は B, C のうち少なくともどちらかには所属している. つまり, $x \in B$ と $x \in C$ の両方の可能性を考慮しておけばよい.

$x \in B$ であるときを考える. 先ほど述べたように, $x \in A$ でもあるから, $\cap$ の定義を考えれば $x \in A \cap B$ となる.

$x \in C$ の場合も同様に, 先ほど示した $x \in A$ と合わせると, $\cap$ の定義から $x \in A \cap C$ となる.

したがって, x は $A \cap B$ または $A \cap C$ のいずれかには所属する. よって, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ である. これで証明したいことが示された. ここでは説明のためにかなり詳しく記述したが, 普通はもう少しあっさりと記述される.

▶ **演習 4.1**　任意の集合 A, B について, $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ であることを示せ. 同様のことが和集合についても言えるか, つまり $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ であるとも言えるかを考察せよ.

▶ **演習 4.2**　任意の集合 A, B について, $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$ を示せ.

▶ **演習 4.3**　式 (11) の証明を参考にして, 式 (12) を証明せよ.

4.2　3 個以上の集合に渡る共通部分と和集合

共通部分と和集合は 3 個以上の集合でも同様に定義される．例えば, $A \cap B \cap C$ は A, B, C の全てに共通する元の全体であり, $A \cup B \cup C$ は A, B, C のうち**どれか 1 つ以上**の集合に属する元の全体である (図 5). なお, $A \cap B \cap C$ などと括弧をつけずに書いてもいいのは, $\cap$ が結合的であるおかげである (命題 4.5(2)). $\cup$ についても同様である．やはり, 共通部分は和集合に含まれている．

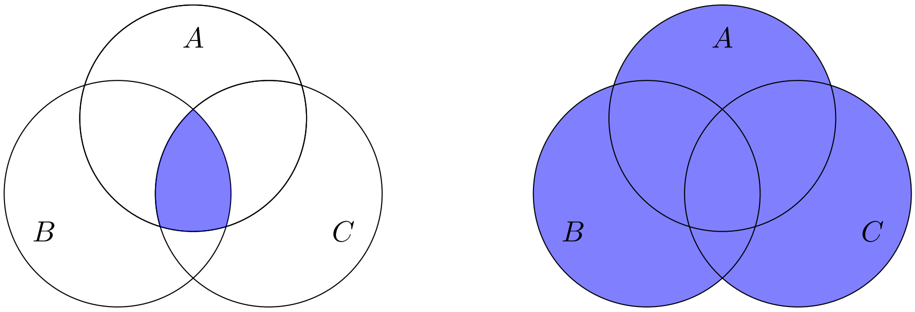


図 5　3 つの集合 A, B, C の共通部分 $A \cap B \cap C$ と和集合 $A \cup B \cup C$.

共通部分と和集合は無限個の集合に対してさえ定義できる．一般に, 集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ に対して, 全ての A_i らに渡る和集合および共通部分は次のように定義される:

$$\begin{aligned}\bigcap_{i \in I} A_i &\overset{\text{def}}{=} \{x \mid \forall i[x \in A_i]\} \\ &= \{x \mid x \text{ は\textbf{全ての} } A_i\ (i \in I) \text{ に共通して属する}\} \\ \bigcup_{i \in I} A_i &\overset{\text{def}}{=} \{x \mid \exists i[x \in A_i]\}, \\ &= \{x \mid x \text{ を含む } A_i\ (i \in I) \text{ が\textbf{存在する}}\}.\end{aligned}$$

ここで, i は I の元を表す変数である．例えば, 自然数で番号付けされた集合族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{A_1, A_2, \dots\}$ があるとき,

$$\begin{aligned}\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i &= \{x \mid x \text{ は全ての } A_1, A_2, \dots \text{ に共通して含まれる}\}, \\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ となる番号 } i \text{ が存在する}\}\end{aligned}$$

である．このように, 共通部分は全称記号 $\forall$, 和集合は存在記号 $\exists$ でそれぞれ定義される．これらの定義が有限個の集合に渡る場合の自然な拡張になっていることは明らかだろう．有限個の集合に渡る場合と同様に, 共通部分は和集合に含まれている．

♦ **例 4.6**　$P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ を素数の全体として, $K = \bigcap_{p \in P} p\mathbb{Z}$ とおく．ここで, $p\mathbb{Z}$ は p の倍数全体である．$x \in K$ とすると, 全ての素数 $p \in P$ について $x \in p\mathbb{Z}$ であり, すなわち x は p の倍数である．しかし, このような整数は $x = 0$ 以外にはない．(0 以外の整数は高々有限個の素因数を持つ．無限個の素因数を持つ整数は 0 だけである.) したがって, $K = \{0\}$ である．一方, ± 1 以外の任意の整数は何らかの素数を約数に持っているから, $\bigcup_{p \in P} p\mathbb{Z}$ は ± 1 以外の整数の全体である．□

♦ **例 4.7**　Σ を任意の集合とする．Σ 上の**文字列**とは, Σ の元 (**文字**) を有限個並べた順序列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ のことである．ここで, 同じ文字が複数回現れてもよい．例えば, $\Sigma = \{a, b, c\}$ のとき, $abbc$, $cabaacaccb$, $babac$ などは全て Σ 上の文字列である．(これら以外にも無限個の文字列がある.) 文字列は**順序列**であ

り, そこに並ぶ文字の順番の違いまで区別される. 例えば, abc と bca は文字が並ぶ順番が違うので, 互いに異なる文字列である.

文字列 $x_1 x_2 \ldots x_n$ に対して, そこに現れる文字の延べ総数 n をその**長さ**と言う. 上の例では, $abbc$ の長さは 4, $cabaacaccb$ の長さは 10, $babac$ の長さは 5 である. 文字を全く含まない特別な文字列として, **空文字列** λ を想定する.[*19] 空文字列はからっぽの列であり, その長さは 0 である.

任意の $n \geq 0$ について, Σ 上の文字列で長さが n であるものの全体を Σ^n で表す. Σ^0 は空文字列 λ のみから成る単元集合である. ($\Sigma^0 = \emptyset$ **ではない**.) Σ が $k(\geq 1)$ 個の元から成る有限集合であれば Σ^n は k^n 個の文字列から成る有限集合であり, Σ が無限集合であれば, 任意の $n \geq 1$ について Σ^n は無限集合である. このとき, 和集合

$$\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$$

は Σ 上の文字列の全体集合である. 定義上, 文字列の長さは有限であり, 長さが ∞ の文字列はここでは考えていないことに注意しておく. (つまり, Σ^∞ は考えない.) 右辺は全ての整数 $n \geq 0$ に渡る Σ^n の和集合であり, 長さが無限である文字列を含んでいるわけではない. □

♦ 例 4.8 (上極限集合と下極限集合) 少しややこしい例に挑戦しよう. 確率論では, 何らかの確率的事象を表現する集合たちの無限列 $A_1, A_2, \ldots$ に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right),$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right)$$

という集合を考えることがある. これらをそれぞれ, 集合列 $A_1, A_2, \ldots$ に対する**上極限集合**および**下極限集合**と呼ぶ.[*20] 見るからにややこしい定義であるが, 補助的に自然数 k に対して

$$A_k^+ \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \cdots,$$
$$A_k^- \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = A_k \cap A_{k+1} \cap A_{k+2} \cap \cdots$$

と定義して,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^+, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^-$$

と書けばちょっとわかりやすくなる. あるいは, 論理記号が苦にならない場合は,

$$x \in \limsup_{n\to\infty} A_n \iff \forall k \exists n [n \geq k \wedge x \in A_n],$$
$$x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \iff \exists k \forall n [n \geq k \to x \in A_n]$$

と書き下して理解すればいい. ただし, k, n は自然数を表す変数である. ここで,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

[*19] $\Sigma = \emptyset$ のときは, 空文字列が Σ 上の唯一の文字列である.

[*20] 定義から分かるように, 上極限集合および下極限集合の定義は集合 $A_1, A_2, \ldots$ らの並ぶ順番に依存する. だから, ここでは「集合族」$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とは言わず,「集合列」$A_1, A_2, \ldots$ と書いた.

であることを示そう．任意の $x \in \liminf A_n$ について，$x \in \limsup A_n$ でもあること，すなわち任意の番号 k について $x \in A_k^+$ であることを示せばよい．$x \in \liminf A_n$ だから，ある番号 l が存在して $x \in A_l^-$ である．$m = \max\{k, l\}$ とすると，$l \leq m$ だから，A_l^- の定義から $x \in A_l^- \subseteq A_m$ である．さらに，$k \leq m$ なので，A_k^+ の定義から $x \in A_m \subseteq A_k^+$ である．これで示すべき包含が言えた．

等号 $\liminf A_n = \limsup A_n$ は成立するとは限らない．この等号が崩れる具体例を挙げることは，見た目ほどには難しくないので，演習問題として残しておこう (→演習 4.7)． □

命題 4.9. $\cup$ と $\cap$ に関する分配則は無限個の集合に対しても成立する．つまり，$\{A_i\}_{i\in I}$ と $\{B_j\}_{j\in J}$ をそれぞれ任意の集合族とするとき，次の式が成立する．

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I, j\in J} (A_i \cap B_j) = \{x \mid \exists (i,j)[x \in A_i \cap B_j]\},$$
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j) = \{x \mid \forall (i,j)[x \in A_i \cup B_j]\}.$$

ここで，i, j はそれぞれ I, J の元を表す変数である．

これについては，図を描いたり真理値表を作成する方法では限界があるので，定義に立ち返った証明が必要である．ここでは I, J は有限集合であるとは限らないので，**I および J の大きさに関する数学的帰納法による証明は通用しない**．

証明．ここでは上側の等式のみを証明し，下側の等式の証明は練習問題とする (→演習 4.8)．

(I) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \subseteq \bigcup_{i\in I, j\in J} (A_i \cap B_j)$ を示す．$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$ とすると，$x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ かつ $x \in \bigcup_{j\in J} B_j$ なので，それぞれ $x \in A_i$, $x \in B_j$ となる $i \in I$, $j \in J$ が存在するが，これらに対して $x \in A_i \cap B_j$ となるので，$x \in \bigcup_{i\in I, j\in J} (A_i \cap B_j)$ である．

(II) 次に，$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \supseteq \bigcup_{i\in I, j\in J} (A_i \cap B_j)$ を示す．$y \in \bigcup_{i\in I, j\in J} (A_i \cap B_j)$ とするとき，ある $i \in I$, $j \in J$ が存在して $y \in A_i \cap B_j$ が成り立つ．$y \in A_i$ なので，$y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ でもある．同じく $y \in B_j$ なので，$y \in \bigcup_{j\in J} B_j$ でもある．したがって，$y \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$ である． □

▶ **演習 4.4**　任意の集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ を考える．

(1) 共通部分 $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ は全ての A_i に共通して含まれる部分集合のうちで最大であることを示せ．(つまり，集合 K が全ての A_i に共通して含まれていれば，必ず $K \subseteq A$ であるということ.)

(2) 和集合 $U = \bigcup_{i\in I} A_i$ は全ての A_i を含む集合のうちで最小であることを示せ．(つまり，集合 K が全ての A_i を含んでいれば，必ず $U \subseteq K$ であるということ.)

▶ **演習 4.5**　任意の自然数 n に対して，$A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \{n, n+1, n+2, n+3, \dots\}$ とおく．$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ．

▶ **演習 4.6**　任意の自然数 m, n に対して，$A_{m,n} = [1/m, 1-1/n] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/m \leq x \leq 1-1/n\}$ とおく．$\bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$ を求めよ．

▶ **演習 4.7**　例 4.8 において，$\liminf_{n\to\infty} A_n \neq \limsup_{n\to\infty} A_n$ となる具体的な事例を挙げよ．

▶ **演習 4.8**　命題 4.9 の下側の等式を証明せよ．

4.3　集合の分割と数え上げ

2 つ以上の集合 (無限個の集合でもよい) から成る族 $\{A_i\}_{i\in I}$ があって, それらの集合のどの相異なる 2 つも交わらないとき, つまり

$$i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset$$

が成り立つとき, 集合 A_i らは**組ごとに交わらない**と言う. 例えば, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$, $C = \{6,7,8\}$, $D = \{9,10\}$ らは組ごとに交わらない集合である. ここで, B を $B = \{4,5,6\}$ に変更すれば, $B \cap C \neq \emptyset$ となるので,「組ごとに交わらない」という条件は崩れる.

集合 X_i らが組ごとに交わらないならば $\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset$ であるが, この逆は一般には成立しない. 例えば, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3\}$ に対しては $A \cap B \cap C = \emptyset$ であるが, どの 2 つも交わる.

集合 X が組ごとに交わらない部分集合 X_i たちの和集合

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i, \qquad \text{ただし, } i \neq j \text{ ならば } X_i \cap X_j = \emptyset$$

で表されるとき, X は X_i らの**非交和**であると言い, $\{X_i\}_{i\in I}$ は X の**分割**をなすと言う.[*21] 有限集合 X が部分集合 $X_1, \dots, X_n$ らの非交和に分割されているとき,

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| \tag{13}$$

である. これは単純で明白な事実であるが, 数え上げ数学における最も基本的な考え方の一つでもある.

♦ **例 4.10**　式 (13) の応用事例を見るために, 高校数学から組み合わせ数学の話題を拝借しよう. X を $n(\geq 1)$ 個の元から成る有限集合とするとき, X の部分集合で大きさが k $(0 \leq k \leq n)$ であるものの個数を $\binom{n}{k}$ と書いて, この形の数を**二項係数**と呼ぶ. 高校数学では, 二項係数には ${}_nC_k$, $C(n,k)$ などの記号がよく用いられる. (C は Choice (選択) あるいは Combination (組み合わせ) に由来する.)

$0 < k < n$ とする. X 上の **k-順列**とは, X の相異なる k 個の元 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ から成る順序組のことである.[*22] k-順列 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ を一つ作るとき, 最初の元 x_1 は X の要素であれば何でもよいので, x_1 の候補は n 通りある. 次の x_2 は x_1 以外の元であれば何でもよいので, その候補は $n-1$ 通りである. その次の x_3 は x_1, x_2 以外の元であれば何でもよいので, その候補は $n-2$ 通りある. この議論を続ければ, 一般に X 上の k-順列の作り方は全部で

$$p(n,k) \overset{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

通りあることがわかる. 特に, $p(n,n) = n!$ である.

X の部分集合で k 個の元から成るものの全体を $X(k)$ で表し, X 上の k-順列の全体を $P(k)$ で表す. 任意の $S \in X(k)$ について, k-順列で S に属する元から構成されるものの全体を $P(k,S)$ で表す. $P(k)$ は全ての $S \in X(k)$ に渡る非交和である.[*23] 一方で, 任意の $S \in X(k)$ について $|P(k,S)| = p(k,k) = k!$ である. よって, 式 (13) から,

$$p(n,k) = |P(k)| = \sum_{S\in X(k)} |P(k,S)| = \sum_{S\in X(k)} k!$$

[*21] X が X_i らに分割されると言う場合には, X_i が空集合ではないという仮定が置かれることもよくある.
[*22] **順序組**とは成分が並ぶ順番まで区別する組のことである. 例えば, $(1,2,3)$ と $(1,3,2)$ は非順序組としては同じ組であるが, 順序組としては別物である.
[*23] $S, S' \in X(k)$, $S \neq S'$ ならば, $P(k,S)$ と $P(k,S')$ は交わらないことに注意. $|S| = |S'| = k$ であることがポイント.

であるが, 二項係数の定義から $|X(k)| = \binom{n}{k}$ なので, 最後の和は $\binom{n}{k}k!$ である．よって,

$$\binom{n}{k} = \frac{p(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

という, 高校数学でもお馴染みの公式が得られた．大きさが 0 の部分集合は空集合のみなので, $\binom{n}{0} = 1$ である．また, 大きさが n の部分集合は X 自身のみなので, $\binom{n}{n} = 1$ でもある．よって, $0! = 1$ と定義しておけば, 上の式は $k \in \{0, n\}$ の場合でも通用する．$\binom{n}{k}$ は k と $n-k$ に対して対称的 ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$) であるが, これは X から k 個の元を選ぶことは残される $n-k$ 個の元を選ぶことと同じであることを反映している．X の部分集合をその大きさごとに分類して個数を数え上げれば, 式 (13) の考え方によって

$$2^n = |2^X| = \sum_{k=0}^{n} |X(k)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{14}$$

が得られる．この式は $n = 0$ であっても通用する．

ついでにちょっと脱線して, もう少しだけ話を続けよう．多項式 $(x+y)^n$ の展開に現れる $x^k y^{n-k}$ の係数は n 個の項 $x+y$ のうちの k 個から x を選んで残りの $n-k$ 個から y を選ぶ方法の総数であるが, それは n 元集合の大きさが k の部分集合の総数, つまり二項係数 $\binom{n}{k}$ である．よって,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

であるが, これが**二項定理**である．式 (14) はここで $x = y = 1$ とすればすぐに導かれる．一方で $x = -1$, $y = 1$ とすれば

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

が得られるが, k が偶数である項と奇数である項に分けて整理すれば

$$\sum_{k=0,\text{偶数}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0,\text{奇数}}^{n} \binom{n}{k}$$

が得られる．左辺は X の部分集合で大きさが偶数であるものの総数, 右辺は同じく X の部分集合で大きさが奇数であるものの総数である．つまり, X の部分集合で偶数個の元から成るものと奇数個の元から成るものはそれぞれ 2^{n-1} 個ずつある． □

集合演算で保たれる性質・保たれない性質　数学では, 集合に関する何らかの性質が共通部分や和集合を取るという操作で保たれるかどうかがしばしば問題にされる．これはつまり, 集合 A, B がある性質 P を持つときに $A \cap B$ や $A \cup B$ もまた性質 P を持つか否かという問題である．無限個の集合が関わる場合についても同様の問題を考えることができる．具体例を見てみよう．

♦ **例 4.11**　n 次元座標空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が**凸集合**であるとは, どの 2 点 $x, y \in A$ に対してもそれら 2 点を結ぶ直線分 $L_{x,y} = \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$ が A に含まれていること, すなわち $L_{x,y} \subseteq A$ であることを言う (図 6)．空集合は (「空虚な真」の意味で) 凸である．単元集合も凸である．de Morgan 則によれば, A が「凸ではない」とは, ある 2 点 $x, y \in A$ が存在して $L_{x,y} \nsubseteq A$ であること, すなわち $tx + (1-t)y \notin A$ となる $t \in [0,1]$ が存在することを意味する．

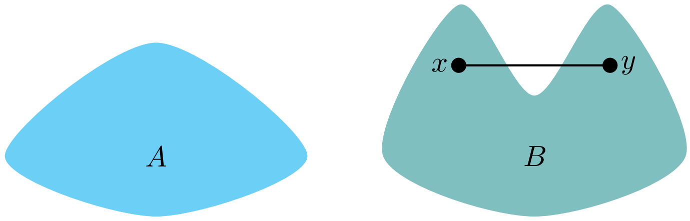


図 6　A は凸であり, B は凸ではない.

「凸である」という性質は共通部分を取る操作で保たれることを示そう. $\{A_i\}_{i\in I}$ を $\mathbb{R}^n$ の凸部分集合 A_i らから成る集合族とする. このとき, 共通部分 $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ も凸であることを示す. $x, y \in A$ とする. どの $i \in I$ についても $x, y \in A_i$ であるが, A_i は凸だから, $L_{x,y} \subseteq A_i$ である. これが全ての $i \in I$ について成り立つので, $L_{x,y} \subseteq A$ である. これで, A が凸であることが示された. なお, この議論は $\{A_i\}_{i\in I}$ が無限族であっても通用するので,「凸である」という性質は (たとえ無限個の集合が関わっていても) 共通部分を取る操作で常に保たれる.

一方で, 凸集合らの和集合は必ずしも凸ではない. それを見るためには,「$X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ がそれぞれ凸であるが, $X \cup Y$ は凸ではない」という事例を反例として挙げればよい. 例えば, $x, y \in \mathbb{R}^n$ が相異なる 2 点であれば, $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ はそれぞれ凸であるが, $X \cup Y = \{x, y\}$ は凸ではない. $z = (x + y)/2$ は直線分 $L_{x,y}$ 上の点であるが, $X \cup Y = \{x, y\}$ には属していないからである. □

▶ **演習 4.9**　Σ を集合, Σ^* を Σ 上の文字列の全体とする. 文字列 $u, v \in \Sigma^*$ に対して, u の直後に v を繋げて得られる文字列を uv と書いて, これを u に v を**連接**した文字列と呼ぶ. ただし, 空文字列 λ については, 全ての文字列 u について $u\lambda = \lambda u = u$ であると約束する. 部分集合 $A \subseteq \Sigma^*$ が連接について**閉じている**とは, 任意の文字列 $u, v \in A$ に対して連接 uv も A に属していることを言う. $\{A_i\}_{i\in I}$ を Σ^* の閉じた部分集合 A_i らから成る族とするとき, 共通部分 $\bigcap_{i\in I} A_i$ もまた閉じていることを証明せよ. また, 和集合 $\bigcup_{i\in I} A_i$ についてはどうか?

▶ **演習 4.10**　$\mathbb{N}$ の部分集合 A が**補有限**であるとは, ある自然数 N 以上の全ての自然数が A に属していることを言うものとする. (この N は A によって変わってもよい. つまり, A が補有限であるとは, A に含まれない自然数が全部で有限個しかないという意味である.)

(1) $\mathbb{N}$ の有限個の補有限部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ について, それらの共通部分 $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ も補有限であることを示せ.

(2) (1) は無限個の補有限部分集合についても成り立つか? つまり, $\{A_i\}_{i\in I}$ を $\mathbb{N}$ の補有限部分集合らで構成される無限族とするとき, 共通部分 $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ は必ず補有限であると言えるか?

4.4　補集合と de Morgan の法則

集合 A と集合 B に対して,

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \land x \notin B\} \tag{15}$$

を A から B を引いた**差集合**または A における B の**補集合**と呼ぶ (図 7). 定義から, B と $A \setminus B$ は交わらない. A を明示しなくてもわかる場合は, $A \setminus B$ を単に B^{c} と書く[*24]. 例えば, 全体集合が $\mathbb{R}$ であることが明らかである場合, $\mathbb{Q}$ の補集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, つまり無理数の全体のことを $\mathbb{Q}^{\mathrm{c}}$ と書く.

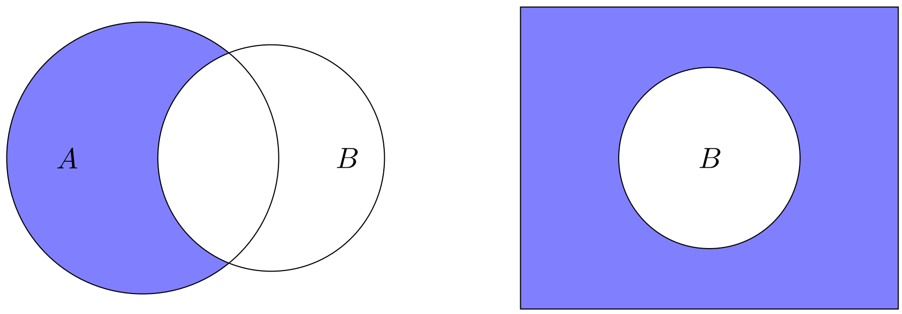


図 7　差集合 $A \setminus B$ と A における B の補集合 B^{c}. 右側の図では, 外枠の長方形が A である.

次の命題は, 命題論理における二重否定則 $\bar{\bar{p}} = p$ に相当するものである.

命題 4.12 (二重否定則)**.** 任意の集合 A について, $A^{\mathrm{cc}} = A$ である.

証明. 任意の元 x と任意の集合 A について, $x \in A$, $x \notin A$ のうち丁度一方が成立する (と約束した) ので, $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow x \in A^{\mathrm{cc}}$ である. □

次の de Morgan 則も, 命題論理における de Morgan 則 (定理 1.6) に相当するものである.

de Morgan 則

定理 4.13. 任意の集合 A, B について,

$$(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}, \quad (A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}.$$

である. ここで, 補集合は A, B を共に含む任意の集合 X 上で取られているとする.

なお, 補集合演算は和集合や共通部分に先行して解釈される. 例えば $A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$ と書いた場合, これは補集合演算を共通部分 $\cap$ よりも先に行って「A^{c} と B^{c} の共通部分」という意味で解釈される. 和集合 $A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$ についても同様である. 定理 4.13 は図を描いたり, あるいは真理値表を作成すれば簡単に確認できるが, 定理 1.6 を用いれば次のようにして簡単に証明できる.

証明. 定理 1.6 から, 任意の $x \in X$ について,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^{\mathrm{c}} &\iff \overline{x \in A \cup B} \\ &\iff \overline{(x \in A) \vee (x \in B)} \\ &\iff \overline{x \in A} \wedge \overline{x \in B} \\ &\iff (x \in A^{\mathrm{c}}) \wedge (x \in B^{\mathrm{c}}) \end{aligned}$$

である. (上棒線は否定を表す.) よって, $(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$ である. $(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$ であることも同様にして示される. □

[*24] この記法は主に $B \subseteq A$ である場合に用いられる. なお, 肩添字の c は補集合を意味する英語 complement set から取った. B^{c} の代わりに $\bar{B}$ や $\neg B$ などの記法を使うこともあるが, 文脈によっては $\bar{B}$ は別の意味で用いられることも少なくないので, 本シリーズでは補集合の意味では使用しない.

♦ **例 4.14**　整数 n の倍数全体を $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ と表す．$3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 15\mathbb{Z}$ であるから，de Morgan の法則から $(3\mathbb{Z})^{\mathsf{c}} \cup (5\mathbb{Z})^{\mathsf{c}} = (15\mathbb{Z})^{\mathsf{c}}$ である．つまり，15 の倍数でない整数とは，3 の倍数でないか，あるいは 5 の倍数でない整数のことである．□

de Morgan の法則は 3 個以上の集合 (無限個でもよい) でも成立する．つまり，任意の集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ に対して，

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\mathsf{c}}, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\mathsf{c}}$$

である．これらは，$\forall$ と $\exists$ に関する de Morgan の法則 (式 (5)) を集合の言葉で言い直したものである．

♦ **例 4.15**　$A_1, A_2, \ldots$ を集合の無限列として，例 4.8 で見た上極限集合と下極限集合

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right)$$

を考えよう．$A_1, A_2, \ldots$ は全てある大きな集合 X の部分集合であると仮定して，補集合は全て X における補集合を意味するものとする．de Morgan 則から，

$$\begin{aligned}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^{\mathsf{c}} &= \left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)\right)^{\mathsf{c}} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)^{\mathsf{c}} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^{\mathsf{c}} \\ &= \liminf_{n\to\infty} A_n^{\mathsf{c}}\end{aligned}$$

である．ここで，最後の行は補集合の列 $A_1^{\mathsf{c}}, A_2^{\mathsf{c}}, \ldots$ に対する下極限集合である．同様にして，de Morgan 則を用いて

$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^{\mathsf{c}} = \limsup_{n\to\infty} A_n^{\mathsf{c}}$$

であることも導出できる．□

▶ **演習 4.11**　任意の集合 A, B について，次の同値を証明せよ．ただし，補集合は A と B を含む任意の集合上で取られているとする:

$$A \subseteq B \iff A \cap B^{\mathsf{c}} = \emptyset \iff B^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}} \iff A \setminus B = \emptyset.$$

▶ **演習 4.12**　$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ であることを示せ．

▶ **演習 4.13**　(1) $A \setminus B = A \setminus B'$ ならば，$B = B'$ であると言えるか?
(2) (1) で，B と B' がそれぞれ A の部分集合である場合に限定するとどうか?

▶ **演習 4.14**　A, B, C, D を集合とする．$A \subseteq C$ かつ $D \subseteq B$ ならば，$A \setminus B \subseteq C \setminus D$ であることを示せ．

4.5 対称差

2 つの集合 A, B の和集合 $A \cup B$ は, A または B に所属する元の全体である. ここの「または」は論理和であり, $x \in A$ かつ $x \in B$ である場合も $x \in A \cup B$ である. これに対して, A, B のうちちょうど一方にのみ所属している元の全体を表す集合演算があってもおかしくはないだろう. 和集合が論理和に相当することに対して, 排他的論理和に相当するものを考えようというわけである.

命題 4.16 (対称差, 図 8)**.** 任意の集合 A, B に対して,

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{16}$$

である. この集合を $A \mathbin{\triangle} B$ と書いて, A と B の**対称差**と呼ぶ. 文献によっては, 対称差には $A \ominus B$, $A \oplus B$ などの別の記号が用いられている.

証明. 式 (16) の左辺は $X = A \cup B$ 上での $A \cap B$ の補集合だから, de Morgan 則からそれは $(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}} = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ に等しい. □

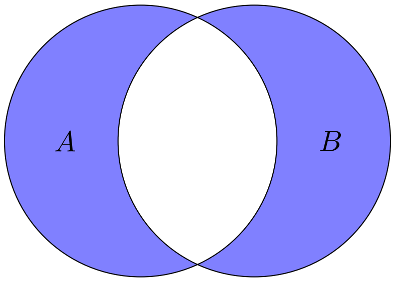


図 8 対称差 $A \mathbin{\triangle} B$.

対称差の定義から, $A \mathbin{\triangle} B = B \mathbin{\triangle} A$ が成り立つ. 空集合との対称差については, $A \mathbin{\triangle} \emptyset = \emptyset \mathbin{\triangle} A = A$ が成り立つ. どの集合 A についても, 自分自身との対称差は $A \mathbin{\triangle} A = \emptyset$ である.

a, b が数であれば, $a - b = 0$ と $a = b$ は同じ意味である. それに対して, 演習 4.11 から集合については $A \setminus B = \emptyset$ は $A \subseteq B$ と同じ意味である. 集合については, $A = B$ と同じ意味なのは $A \mathbin{\triangle} B = \emptyset$ である. 数に準えて考えるのであれば, $a = b$ が $|a - b| = 0$ と同じであることに対比させればよい.

命題 4.17 ($\triangle$ の結合則)**.** 任意の集合 A, B, C について, $(A \mathbin{\triangle} B) \mathbin{\triangle} C = A \mathbin{\triangle} (B \mathbin{\triangle} C)$ である. (したがって, この集合を括弧を付けずに $A \mathbin{\triangle} B \mathbin{\triangle} C$ と書いても矛盾なく意味が通じる.)

証明. $\triangle$ の定義に立ち返り地道に $(A \mathbin{\triangle} B) \mathbin{\triangle} C \subseteq A \mathbin{\triangle} (B \mathbin{\triangle} C)$ と $(A \mathbin{\triangle} B) \mathbin{\triangle} C \supseteq A \mathbin{\triangle} (B \mathbin{\triangle} C)$ をそれぞれ証明するという方法でも良いし, 真理値表を作成して証明してもよい. ここでは, それらとは別のアイデアを提示する目的で, 算術的な方法で証明してみよう.

任意の集合 X と任意の元 x に対して, $X(x) = 1$ ($x \in X$ のとき), $X(x) = 0$ ($x \notin X$ のとき) と定める. すると, (i) $x \in A \mathbin{\triangle} B \Leftrightarrow A(x) + B(x) = 1$, (ii) $(A \mathbin{\triangle} B)(x) = A(x) + B(x) - 2A(x)B(x)$ である. よって, 任意の x に対して次の同値が得られる:

$$\begin{aligned} x \in (A \mathbin{\triangle} B) \mathbin{\triangle} C &\iff (A \mathbin{\triangle} B)(x) + C(x) = 1 && \text{(i)} \\ &\iff A(x) + B(x) + C(x) - 2A(x)B(x) = 1. && \text{(ii)} \end{aligned}$$

ここで, $A(x)+B(x)+C(x)-2A(x)B(x) = 1$ ならば, $A(x)+B(x)+C(x)$ は奇数であり, したがって 1 または 3 である. 逆に $A(x)+B(x)+C(x) \in \{1, 3\}$ のとき, (a) $A(x)+B(x)+C(x) = 1$ ならば, $A(x)$, $B(x)$

のうち一方は必ず 0 だから $A(x)B(x) = 0$ であり, $A(x) + B(x) + C(x) - 2A(x)B(x) = 1$ である; (b) $A(x)+B(x)+C(x) = 3$ ならば, $A(x) = B(x) = C(x) = 1$ であり, $A(x)+B(x)+C(x)-2A(x)B(x) = 1$ である. よって,

$$\begin{aligned} x \in (A \vartriangle B) \vartriangle C &\iff A(x) + B(x) + C(x) - 2A(x)B(x) = 1 \\ &\iff A(x) + B(x) + C(x) \in \{1, 3\} \end{aligned}$$

である. 同様に, $x \in A \vartriangle (B \vartriangle C) \Leftrightarrow A(x) + B(x) + C(x) \in \{1, 3\}$ であることも言える. したがって, どの x についても $x \in (A \vartriangle B) \vartriangle C \Leftrightarrow x \in A \vartriangle (B \vartriangle C)$ であり, 示すべき等式が成立する. □

この証明から分かるように, $A \vartriangle B \vartriangle C$ は A, B, C のうち奇数個の集合に属する元の全体である (図 9).

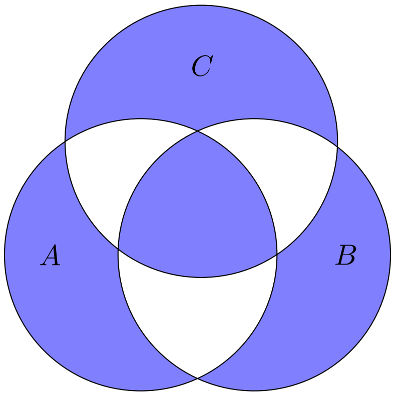


図 9 命題 4.17. $(A \vartriangle B) \vartriangle C$ と $A \vartriangle (B \vartriangle C)$ はどちらも図の青い部分に一致する.

▶ **演習 4.15** 任意の集合 A, B について, 次のことを示せ.

(1) $A = B \iff A \vartriangle B = \emptyset$. (特に, $A \vartriangle A = \emptyset$ である.)
(2) $A \vartriangle B = B \iff A = \emptyset$.
(3) $A \setminus (A \vartriangle B) = A \cap B$.

▶ **演習 4.16** ($\vartriangle$ と $\cap$ の分配則) 任意の集合 A, B, C に対して,

$$A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$$

であることを証明せよ.

▶ **演習 4.17** 任意の集合 A, B, C に対して, 次の等式をそれぞれ証明せよ.

(1) $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B$.
(2) $(A \vartriangle B) \vartriangle (B \vartriangle C) = A \vartriangle C$.
(3) $(A \vartriangle B) \cap (B \vartriangle C) \cap (C \vartriangle A) = \emptyset$.

4.6 直積集合

2 次元座標平面上の点の位置は x-座標と y-座標の組み合わせで表されるし, トランプのカード (ジョーカーは除く) の情報はマーク (スート) と数字という 2 つの情報の組み合わせで表現される. このように, 複

数の成分の組み合わせで 1 つのオブジェクトが特定されるという状況はたくさんある．直積集合は, 集合論においてそのような状況を扱うための最も基本的なしくみである．

集合 A, B に対して, A の元 a と B の元 b の組 (a, b) の全体を

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}$$

と書き, これを A と B の**直積**と呼ぶ．ここで, (a, b) は**順序組**であり, $a \neq b$ ならば $(a, b) \neq (b, a)$ であるものと考える．つまり, **成分が並ぶ順番の違いも区別される**:

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ かつ } b = b'.$$

♦ **例 4.18** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ のとき,

$$A \times B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}$$

である．$(2, x) \in A \times B$ であるが, $(x, 2) \notin A \times B$ である．同じく, $(x, 2) \in B \times A$ であるが, $(2, x) \notin B \times A$ である．このように, 一般に $A \neq B$ ならば $A \times B \neq B \times A$ である． □

この例で見たように, A, B が互いに異なる空でない集合ならば, $A \times B$ と $B \times A$ は区別される．しかし, この区別はそれほど重大なものではなく, 単に成分の並び順を入れ替えれば解消するという程度のものである．

♦ **例 4.19** $S = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, $C = \{2, 3, 4, \dots, J, Q, K, A\}$ とおくと, ジョーカーを除くトランプ全 52 枚の集合は直積集合 $S \times C$ で表現することができる．例えば, $(\heartsuit, 7)$ はハートの 7 を表している． □

♦ **例 4.20** (直和集合) $\{A_i\}_{i \in I}$ を任意の集合族とする．ここで, 添字集合 I は空集合ではないと仮定しておくが, それが有限集合であるとは仮定しない．$U = \bigcup_{i \in I} A_i$ とおき,

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, i) \in U \times I \mid x \in A_i\}$$

と定義する．これを集合 A_i らの**直和**と呼ぶ．(x, i) は「A_i のメンバーとしての x」のことを指す形式的な表現である．直和を表す記号としては, 他にも $\bigoplus_{i \in I} A_i$, $\biguplus_{i \in I} A_i$, $\coprod_{i \in I} A_i$ などが使われることもある．有限個の集合に渡る直和は $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_n$ などとも書かれる．

具体例で考えてみよう．$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{c, d\}$ とする．普通の和集合は $X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$ である．一方で, 直和 $X \sqcup Y$ は

$$X \sqcup Y = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (c, 2), (d, 2)\}$$

である．(ここでは, $I = \{1, 2\}$, $X = X_1$, $Y = X_2$ と考えた.) このように, $X \sqcup Y$ の構成は, X を $X \times \{1\}$ に, Y を $Y \times \{2\}$ に, それぞれ置き換えてから両者の和集合 $(X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\})$ を取るという手順であるが, この置き換えは **X と Y を互いに交わらない集合として扱うための一つの方便**である．この例では, c は X, Y に共通しており, それは普通の和集合 $X \cup Y$ では単にそこに属する一つの元として扱われる．一方で, $X \sqcup Y$ では, X の元としての c は $(c, 1)$ と表され, Y の元としての c は $(c, 2)$ と表され, 区別されているという違いがある．

要するに, **$X \sqcup Y$ は強制的に X と Y は交わらないと見做して作られる和集合である**．このことから, 直和を**形式的非交和**とも言う．このように, 和集合 $X \cup Y$ と直和 $X \sqcup Y$ の本質的な違いは, $X \cap Y$ に属

する元の取り扱いのみである．$X \cap Y = \emptyset$ であるときには，普通の和集合 $X \cup Y$ と直和 $X \sqcup Y$ は同じ集合であると考えてよい．もう少し一般的に，集合 A_i らが組ごとに交わらないときには，和集合 $\bigcup_{i \in I} A_i$ と直和 $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ は同じ集合であると考えてよい．定義から，I が有限集合であり，各々の A_i が有限集合であるとき，$\bigsqcup_{i \in I} A_i$ は $\sum_{i \in I} |A_i|$ 個の元から成る有限集合である．一方で，和集合の大きさはそれよりも真に小さくなり得る． □

直積集合は 3 個以上の集合に対しても同様にして定義される．集合 $A_1, \dots, A_n$ に対して，それらの直積集合 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ は

$$(a_1, \dots, a_n), \quad ただし\ a_i \in A_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

という n 項順序組 $(a_1, \dots, a_n)$ の全体である．ここでも，成分が並ぶ順番も区別される：

$$(a_1, \dots, a_n) = (a'_1, \dots, a'_n) \iff 全ての\ 1 \leq i \leq n\ について\ a_i = a'_i.$$

A_i が m_i 個の元から成る有限集合ならば，直積集合 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ は $m = \prod_{i=1}^{n} m_i$ 個の元から成る有限集合である．

♦ **例 4.21**　$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は実数が 3 個並んだ順序組の全体である．$\mathbb{R}^3$ の元は 3 次元座標空間上の点の位置 (座標) を表現しているので，$\mathbb{R}^3$ は 3 次元空間そのものと同一視される．$\mathbb{R}^2$ のことを座標平面と言う場合もこれと同じ考え方をしている． □

命題 4.22. 直積集合 $\prod_{i=1}^{n} A_i$ が空集合であるためには，$A_1, \dots, A_n$ のうちのどれか一つ以上が空集合であることが必要十分である．

証明．十分性：ある A_i が空集合であるとき，「第 i-成分が A_i の元である n 項順序組」は存在しない．したがって，$\prod_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ である．

必要性：対偶証明法．$A_1, \dots, A_n$ がどれも空集合ではないと仮定すると，各々の A_i は少なくとも一つの元を含んでいる．各 A_i から元 a_i を任意に一つずつ選んで $a = (a_1, \dots, a_n)$ とおくと，$a \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ である．したがって，$\prod_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ である． □

無限個の集合に渡る直積集合を考えることもできるし，直積集合をもっと抽象的な立場から定義することもできるが，それらの話については第 2 巻『写像』で触れる．

▶ **演習 4.18**　A, B, C, D を空でない集合とするとき，$A \times B \subseteq C \times D \iff A \subseteq C$ かつ $B \subseteq D$ であることを示せ．

▶ **演習 4.19**　A, B, C を任意の集合とするとき，次の式をそれぞれ証明せよ．

(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

▶ **演習 4.20**　A, A', B, B' を任意の集合とする．

(1) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$ であることを示せ．
(2) $(A \times B) \cup (A' \times B') \subseteq (A \cup A') \times (B \cup B')$ であることを示せ．
(3) (2) で，$(A \times B) \cup (A' \times B') \neq (A \cup A') \times (B \cup B')$ となるような実例を挙げよ．

▶ **演習 4.21**　A を直積 $X \times Y$ の部分集合として,

$$A_X = \{x \in X \mid \text{ある } y \in Y \text{ に対して } (x,y) \in A \text{ である}\},$$
$$A_Y = \{y \in Y \mid \text{ある } x \in X \text{ に対して } (x,y) \in A \text{ である}\}$$

とおく．このとき, $A \subseteq A_X \times A_Y$ であることを示せ．また, $A \neq A_X \times A_Y$ となる具体例を挙げよ．

5　付記—集合論のパラドックスから公理的集合論へ

本巻では, 集合については単に「物の集まり」として定義したところから出発した．このような素朴な理解から始まる集合論は**素朴集合論**と呼ばれている．数学の世界における普段使いの公用語という観点で見れば, 集合についてはこの素朴集合論的な理解が基礎になる．しかし, この「物の集まり」という集合の定義には数学的定義と呼べるほどの厳密さはない．果たして,「モノの集まり」なら何でも集合になり得るのだろうか? もちろん,「美しい花の集合」のように定義が曖昧なものは論外だが, そうでない集団ならばいいのだろうか?

5.1　集合論のパラドックス

集合もまた数学上のオブジェクトだから, 集合を集めて集合を作ることができることは 3.5 項で述べた通りである．例えば, S を任意の集合とするとき, S の冪集合は S の全ての部分集合から成る集団であるが, これが集合を集めて作られる集合の典型例である．それでは, 一番大きい集合族は何かと言えば, それは全ての集合から成る集団

$$X = \{S \mid S \text{ は集合}\}$$

である．ところが, この X を集合として認めると論理的な矛盾が生じて破綻してしまう．どういうことなのか, 簡単に見ておこう．X が集合であるならば, $X \in X$ である．(なにせ, X は「全ての集合の集まり」だから.) このように, 自分自身を含む集合を「I-型集合」と呼ぶことにする.[*25] 一方で, I-型集合でない集合, つまり $S \notin S$ となる集合 S を「II-型集合」と呼んでおこう．この定義から, どの集合もそれぞれ I-型であるか II-型であるか, どちらか一方である．ここで, X の部分集合

$$Y = \{S \mid S \text{ は II-型集合}\} = \{S \mid S \notin S\}$$

を考える．この Y 自身は I-型, II-型のどちらだろう? 実は次の通り, 論理的矛盾を引き起こす直接の犯人はこの Y である．

- Y が I-型であるとする．Y は II-型集合の集まりだから, Y が I-型である以上は $Y \notin Y$ であるが, これはまさしく Y が II-型であることを意味しており, 矛盾する．
- Y が II-型であるとする．Y は II-型集合の集まりだから, Y が II-型である以上は $Y \in Y$ であるが, これはまさしく Y が I-型であることを意味しており, 矛盾する．

[*25] 集合が自分自身に属するというのは違和感があるが,「全ての集合から成る集合」を集合と認めれば I-型集合も発生し得る．ただし, ここで「違和感があるから I-型集合の存在は矛盾である」と言いたいわけではない．

この矛盾は Bertland Russell[*26]に因んで **Russell のパラドックス**と呼ばれている．パラドックスは日本語では**逆理**などと呼ばれ, 妥当な前提と妥当な推論から妥当とは思えない結論や矛盾が導かれることを指している．

Russell のパラドックスは, **物の集まりを何でも無節操に集合として認めると破綻する**ことを教えている．もちろん, 我々は「美しい花の集合」のような '明白に曖昧' なものは最初から除外しているが, 一見するとしっかり定義されているように見える集団であっても論理破綻をもたらすものがあり得ることを, Russell のパラドックスは示している．別の言い方をすると, 集合の内包的記述 $X = \{x \mid P(x)\}$ は使い方を間違えると論理破綻につながるというわけである．

5.2　公理的集合論へ

Russell のパラドックス以外にも, パラドックスが次々と発見されるに至って, そうなると当然のように湧いてくる疑問は「それじゃあ, 集合って結局何なんだ?」ということだろう．どんな集団なら集合で, どんな集団は集合ではないのか? いや, そもそも「集まり」って何だ?

集合とは何か? このような根源的な問いに厳密な答えを与えるのは難しい．ここで数学が採ったアプローチは,「集合とは何か」という問いに直接「集合とは〜である」という辞書的な回答を与えるのではなく, 集合に期待されるべき機能・性質に着目した幾つかの約束事を**公理**として設定し, それを基盤とした推論の緻密な積み重ねによって理論を構築していくというアプローチである．言わば,「集合とは何か, 何であるべきか」は公理を通して一つの理論全体をもって表現されると考えるわけである．このような公理的基盤に基づく集合論は素朴集合論に対して**公理的集合論**と呼ばれている．

公理的集合論には, 公理系の取り方によって複数の理論があり得る．それらはもちろん, 素朴集合論の理解をなるべく自然な形で記述できるものであることが望ましい．さらに, 矛盾を生み出す公理系では結局は破綻してしまうので, 当然ながら公理系は無矛盾であるべきだし, 少なくとも Russell のパラドックスなど既知の矛盾を回避できるように注意深く設計されているべきである．しかし, 悩ましいことに, たとえ公理系が無矛盾であったとしても, それが自身の無矛盾性を証明するという話になると, Kurt Gödel による**第二不完全性定理**の壁が立ちはだかる.[*27]

現在のところ, 標準的な公理的集合論として広く受け入れられているものは **Zermelo-Fraenkel 集合論**, 略して **ZF 集合論** (Ernst Zermelo, Adolf Fraenkel に因む) と呼ばれる集合論である．現在定着している ZF 集合論の公理セットは, 高度に抽象化・形式化されてはいるが, その内容はそれほど複雑なものではなく, 私たちが持っている素朴集合論的ないくつかの基本的な理解, 例えば「2 つの集合は, 両者が全く同一の元から構成されているとき, かつその時に限り等しい」「空集合が存在する」「任意の集合に冪集合が存在する」などということを論理式を用いて表現しているものである．ZF 集合論では,「全ての集合の集まり」などの '大きすぎる集団' は論理的矛盾を引き起こす集団ではなく, 集合として構成できない集団という扱いになる．要は, 素朴集合論では「集合とは何か」を明確に捉えきれていなかったところが, ZF 集合論では基礎となる公理系を通してそれが明確にされたということである．

ZF 集合論にはない '大きすぎる集団' も明示的に扱える集合論も複数提案されている．対象物が複数あれば, それらの間の関係性を調べるのが数学の常であり, 集合論ももちろん例外ではない．ZF 集合論も含めて, 複数の集合論に渡る関係性——例えば, ある集合論 X での定理は別の集合論 Y においても証明可能で

[*26] イギリスの数学者, 論理学者, 哲学者．世界三大幸福論の一つ「ラッセルの幸福論」の著者でもある．

[*27] 細かい事情を無視して大雑把に言えば, 第二不完全性定理の主張は,「その中で '初等的な自然数論' を展開可能であるようなマトモな公理系は, たとえそれが無矛盾であっても, 自身の無矛盾性を証明できない」というものである．

あるか? 集合論 X では証明できない定理が別の集合論 Y では証明できるのか? などという関係性——もよく調べられている.

公理的集合論は厳密で素朴集合論はそうではないなどと言えば, 素朴集合論の方が劣った理論だと思われるかも知れないが, それは厳密性という観点のみから見た一面的な見方でしかない. (しかも, 集合論の発展の歴史を無視した見方でもあるし, 素朴集合論から無限集合に関する深い洞察が生まれたことなど重要な事実も無視している.) 英語学習に喩えてみれば, 公理的集合論は言わば英語という言語現象を厳密に記述しようとする理論であり, 素朴集合論は実践的な英語運用のための実用文法理論だと言えるだろうが, 実用文法がたとえ理論的には不完全だとしても, それは決して劣った無用な理論ではない. ネイティブ話者でもない限り, 実用文法の知識なくして英語を使いこなせるようにはならないのと同じように, 素朴集合論なしには私たち生身の人間は数学で何もできないだろう. 私たちは, 理論的基盤として公理的集合論があることは認識しつつも, もっぱら素朴集合論の立場で先に進もう.

付録 A　演習問題解答例

ここに示されているのはあくまで解答の一例であり，これだけが唯一絶対の正しい解答というわけではない．参考程度の略解という位置付けである．

演習 1.1.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
F	F	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T

演習 1.2.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
F	F	T	T	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	T	F	F

演習 1.3.　(1) これは「x ならば y である」という状況で，y が不成立ならば x も不成立であるという意味であり，**後件否定**または**モーダストレンス**[*28]と呼ばれる推論である．形式的な検証は次の通り．$(x \to y) \wedge \bar{y}$ が真であるのは，$x \to y$ と $\bar{y}$ が真であるときだけであるが，それは x と y が共に偽である場合のみである．その場合，$\bar{x}$ は真なので，$((x \to y) \wedge \bar{y}) \to \bar{x}$ は真である．一方，$(x \to y) \wedge \bar{y}$ が偽ならば $((x \to y) \wedge \bar{y}) \to \bar{x}$ は空虚に真である．ゆえに，$((x \to y) \wedge \bar{y}) \to \bar{x}$ は常に真である．

(2) これは「x ならば y である」かつ「y ならば z である」という状況では，x が成り立てば自ずと z も成り立つという意味であり，「ならば」が推移的に働くことを意味している．(**仮言三段論法**と呼ばれる論法である.) これも日常語的な感覚では当然のことであるが，形式的にも次のように検証できる．まず，論理包含の定義および de Morgan 則から

$$
\begin{aligned}
((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z) &\equiv \overline{(x \to y) \wedge (y \to z)} \vee (x \to z) \\
&\equiv (\overline{x \to y} \vee \overline{y \to z}) \vee (x \to z) \\
&\equiv (x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee z)
\end{aligned}
$$

である．ここで，$x = \mathrm{F}$ または $z = \mathrm{T}$ ならば $\bar{x} \vee z = \mathrm{T}$ であり，それ以外のとき (つまり，$x = \mathrm{T}$ かつ $z = \mathrm{F}$ のとき) は $(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z}) \equiv \bar{y} \vee y \equiv \mathrm{T}$ だから，この命題論理式は常に真である．

[*28] ラテン語 modus tollens.「否定による肯定」という意味.

(3) これは, x または y が成り立てば z が成り立つという状況の下で, x あるいは y が成立すれば z が成立するという意味である. 形式的な検証は次の通り. 以下, $P = (x \vee y) \wedge (x \to z) \wedge (y \to z)$ とおく.

(i) x, y が共に偽のとき, $x \vee y$ が偽だから P は偽であり, よって $P \to z$ は空虚に真である.

(ii) x が真と仮定する. z が偽ならば, $x \to z$ が偽なので P は偽であり, よって $P \to z$ は空虚に真である. z が真のときは, $x \to z$ は真であり, かつ y の真偽によらず $x \vee y$, $y \to z$ は共に真なので P は真である. そして z も真だから, $P \to z$ は真である.

(iii) y が真であるときも, (ii) の議論を x と y の立場を入れ替えて繰り返せば, $P \to z$ は必ず真であることがわかる. □

演習 1.4.　$P(x, y)$ は x と y が共に真であるときに偽だから恒真式ではなく, 推論 $(x \vee y) \wedge x \Rightarrow \bar{y}$ は機能しない. これは,「x または y である」という状況下で, x であることを根拠に y を否定しようとするもので, **選言肯定**と呼ばれる誤謬である. 論理和 $x \vee y$ が x と y が共に真である場合も真であることを無視した誤謬である.

具体例:「数学または物理の試験に合格した」という状況下で, 数学に合格したことを根拠に, 物理は不合格だったとは言えない. 数学と物理の両方に合格した可能性があるから. □

演習 1.5.　(1) P を真にする任意の割り当て w を考える. 推論 $P \Rightarrow Q$ から, w の下で Q は真である. そして推論 $Q \Rightarrow R$ から, w の下で R は真である. したがって, 推論 $P \Rightarrow R$ が成り立つ.

(2) $P \vee Q$ を真にする任意の割り当て w を考える. w の下では, P または Q のうち少なくとも一方は真である. P が真であるとき, 推論 $P \Rightarrow R$ から R は真である. 同様に, Q が真であるとき, 推論 $Q \Rightarrow R$ から R は真である. よって, いずれにせよ w の下で R は真である. したがって, 推論 $P \vee Q \Rightarrow R$ が成り立つ. □

演習 2.1.　$\forall x \exists y[p(x, y)]$ は偽である (x_2 からは 1 本も辺が出ていない). $\forall y \exists x[p(x, y)]$ は真である (どの y_j についても 1 本以上の辺が入ってきている). $\exists x \forall y[p(x, y)]$ は真である (x_3 からは全ての $y_1, \ldots, y_4$ に向かって辺が伸びている). $\exists y \forall x[p(x, y)]$ は偽である (どの y_j についても, x_2 からは辺が伸びてきていない). □

演習 2.2.　(a) $\forall x \exists y[p(x, y)]$ は「各々の素数 x について, それを約数に持つ自然数 y が存在する」という意味で, これは真である.

(b) $\exists x \forall y[p(x, y)]$ は「全ての自然数 $y(\geq 2)$ の約数となる素数 x が存在する」という意味で, これは偽である. どんな素数 x についても, それを約数としない自然数 y が存在する (たとえば $y = x + 1$) からである.

(c) $\forall y \exists x[p(x, y)]$ は「(2 以上の) どんな自然数 y にも, その約数となる素数 x が存在する」という意味で, これは真である.

(d) $\exists y \forall x[p(x, y)]$ は「全ての素数を約数に持つ自然数 $y(\geq 2)$ が存在する」という意味で, これは偽である. □

演習 2.3. 例 2.2 の記号をそのまま利用する．x が a に収束しないことは, de Morgan を利用して,

$$\begin{aligned}\overline{\forall\varepsilon\exists n_0\forall n[n \geq n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon]} &\equiv \exists\varepsilon\overline{\exists n_0\forall n[n \geq n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon]}\\ &\equiv \exists\varepsilon\forall n_0\overline{\forall n[n \geq n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon]}\\ &\equiv \exists\varepsilon\forall n_0\exists n\overline{[n \geq n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon]}\\ &\equiv \exists\varepsilon\forall n_0\exists n[n \geq n_0 \wedge |x_n - a| \geq \varepsilon]\end{aligned}$$

と書ける．(最後は, $p \to q$ の否定が $p \wedge \bar{q}$ であることに注意.) 文章で書けば「ある正実数 ε が存在して, どんな番号 n_0 についても, それ以上の番号 n で $|x_n - a| \geq \varepsilon$ となるものが存在する」となる．□

演習 3.1. (1) $A = \{p+q \mid p+q \leq 20,\ p, q$ は相異なる素数$\}$．$2+3=5$, $3+5=8$, $2+7=9$, $5+11=16$ などは A に属するが, 1, 2, 3, 4 は A に属さない．

(2) $B = \{a+tn \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$．例えば, a, $a+t$, $a+2t$, $a+3t$ などは B に属する．$t \neq 0$ のとき, $a+t/2$ は B に属さない．($a+t/2 \in B$ とすると, ある整数 $n \geq 0$ について $a+t/2 = a+tn$ となるが, これは矛盾 $n = 1/2$ を導く.) $t = 0$ のときには, $B = \{a\}$ であり, B は a 以外の実数を含まない．

(3) $C = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$．(ただし $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す.) $3-2i$, $-1+4i$ などが C の要素であるが, $(1/2)+i$ や $2+\sqrt{2}i$ などは C に属さない．

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1/16$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在する$\}$．
例えば, $(1/100, 1/100)$ は D に属するが, $(1/2, 1/2)$ は D に属さない．□

演習 3.2. (1) A は 2 つの平方数の和で表される整数の全体である．(平方数とは, 何らかの整数の 2 乗で表される整数のことである.) 例えば, $5 = 1^2 + 2^2$, $34 = 3^2 + 5^2$ などが A に属している．$6 = x^2 + y^2$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ とすると, $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 = 6$ なので $x \in \{0, 1, 2\}$ であるが, このいずれの x に対しても, $y^2 = 6 - x^2$ となる整数 y が存在しない．よって, $6 \notin A$ である．

(2) B は $n+2$ が素数となるような素数 n の全体である．例えば, $3, 5, 11, 17 \in B$ であるが, $13, 23 \notin B$ である．

(3) C は全ての項番号 n について $x_{n+1} \geq 2x_n$ となる実数列 x の全体である．例えば, $x_n = 4n$ で定まる実数列 x は C に属するが, $x_n = n+1$ で定まる実数列 x は C に属さない．□

演習 3.3. 一般に, 2 次正方行列 a について, a の第 1 列目は ae_1 $(e_1 = \binom{1}{0})$ で与えられ, 第 2 列目は ae_2 $(e_2 = \binom{0}{1})$ で与えられることに注意する．$a \in A$ であるとき, (e_1, e_2 は共に整数ベクトルなので) ae_1, ae_2 は共に整数ベクトルである．ゆえに, a の成分は全て整数であり, $a \in B$ である．したがって, $A \subseteq B$ である．$b \in B$ であれば, どの整数ベクトル $u \in \mathbb{Z}^2$ についても bu の成分はどちらも整数なので, $b \in A$ である．よって, $A \supseteq B$ でもある．以上から, $A = B$ である．□

演習 3.4. 任意の $z = a + b\sqrt{2} \in B$ (ただし $a, b \in \mathbb{Z}$) は整数係数多項式 $f(x) = a + bx \in P$ を用いて $z = f(\sqrt{2})$ と書けるから, $z \in A$ である．よって, $B \subseteq A$ である．次に $B \supseteq A$ を示す．A の任意の元は, 何らかの $f \in P$ を用いて $f(\sqrt{2})$ と表される．f を多項式 $x^2 - 2$ で割った商多項式が q, 余りの多項式が r であるとすると, $f(x) = (x^2-2)q(x) + r(x)$, $\deg r \leq 1$ である．(deg は多項式の次数を表す.) r は 1 次以下なので, $r(x) = a + bx$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と書ける．よって, $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}^2 - 2)q(\sqrt{2}) + r(\sqrt{2}) = r(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2} \in B$ である．これで $A \subseteq B$ が示された．以上から, $A = B$ である．□

演習 3.5. (1) どの整数 z についても, 整数 $x = -5z$, $y = 2z$ に対して $5x + 13y = -25z + 26z = z$ となる．よって, $A = \emptyset$ である．

(2) 任意の自然数 x, y について $4x + 7y \geq 4$ であるから, $1, 2, 3 \in B$ である.

(3) $x, y \in M_2(\mathbb{R})$ を非正則, $z = xy$ とする. y は正則でないので, $yu = 0$ (零ベクトル) となる 0 でない縦ベクトル $u \in \mathbb{R}^2$ が存在する. すると, $zu = (xy)u = x(yu) = x0 = 0$ となるので, z は正則ではない. (z が正則であれば, $zu = 0$ は $u = z^{-1}0 = 0$ を意味するはず.) ゆえに, x, y が正則でないならば $z = xy$ も正則ではなく, $C = \emptyset$ である. □

演習 3.6.　$A \subseteq B$ とする. 2^A の任意の元 S は A の部分集合であるが, $A \subseteq B$ なので, S は B の部分集合でもあり, すなわち $S \in 2^B$ である. よって, $2^A \subseteq 2^B$ である. 逆に, $2^A \subseteq 2^B$ であれば, $A \in 2^A$ であることから $A \in 2^B$ であること, すなわち $A \subseteq B$ であることが従う. □

演習 4.1.　$S \in 2^{A \cap B}$ とすると, $S \subseteq A \cap B$ なので, S は A の部分集合でもありかつ B の部分集合でもある. つまり, $S \in 2^A \cap 2^B$ である. よって, $2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$ である. 一方, $T \in 2^A \cap 2^B$ ならば, $T \in 2^A$ かつ $T \in 2^B$ であり, すなわち T は A の部分集合でもあるし B の部分集合でもある. ゆえに, 命題 4.2(5) から $T \subseteq A \cap B$, つまり $T \in 2^{A \cap B}$ である. よって, $2^{A \cap B} \supseteq 2^A \cap 2^B$ でもあり, $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ が成り立つ.

$A \subseteq A \cup B$ なので, 演習 3.6 から $2^A \subseteq 2^{A \cup B}$ である. 同様に, $2^B \subseteq 2^{A \cup B}$ でもある. よって, 命題 4.2(5) から $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$ である. 一方で, 等号 $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$ は一般に不成立である. 例えば, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ のとき, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ だから $S = \{1, 3\}$ は $2^{A \cup B}$ に属するが, 一方で S は 2^A にも 2^B にも属していない. □

演習 4.2.　(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ について: $A \cap B \subseteq A$ は $A \cap B$ の定義から明らか. $x \in A$ のとき, 仮定 $A \subseteq B$ から $x \in B$ でもあるので, $x \in A \cap B$ である. よって, $A \cap B \supseteq A$ でもあり, $A \cap B = A$ となる.

(b) $A \subseteq B \Leftarrow A \cap B = A$ について: $A \cap B$ の定義から, $A = A \cap B \subseteq B$.

(c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ について: $A \cup B \supseteq B$ は $A \cup B$ の定義から明らか. $x \in A \cup B$ のとき, $x \in A$ であれば仮定 $A \subseteq B$ から $x \in B$ でもあるので, いずれにせよ $x \in B$ となる. よって, $A \cup B \subseteq B$ でもあり, $A \cup B = B$ が成り立つ.

(d) $A \subseteq B \Leftarrow A \cup B = B$ について: $A \cup B$ の定義から, $B = A \cup B \supseteq A$. □

演習 4.4.　(1) 全ての A_i に共通して含まれている任意の集合 K を考える. $x \in K$ とする. K の取り方から, 全ての $i \in I$ について $K \subseteq A_i$ であり, したがって $x \in A_i$ でもある. よって, $x \in \bigcap_{i \in I} A_i = A$ である.

(2) 全ての A_i を含む任意の集合 K を考える. $x \in U$ とする. U の定義から, $x \in A_i$ を満たす $i \in I$ が存在するが, K の取り方から $A_i \subseteq K$ でもあるので, $x \in K$ でもある. よって, $U \subseteq K$ である. □

演習 4.3.　任意の $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ について $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示せばよい. 仮定から, (i) $x \in A \cap B$ または (ii) $x \in A \cap C$ である. このいずれの場合でも $x \in A$ は必ず成り立っている. (i) の場合は $x \in B$, (ii) の場合は $x \in C$ なので, いずれにせよ $x \in B \cup C$ である. ゆえに, $x \in A \cap (B \cup C)$ である. □

演習 4.5.　どの自然数 k についても, $k \notin A_{k+1}$ である. よって, 全ての A_n に共通して含まれる自然数は存在しない. つまり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ である. □

演習 4.6. $I = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ とおく．$x \in I$ とする．自然数 n を十分大きく取れば，$1/n < \min\{x, 1-x\}$ となるが，その n に対して $x \in A_{n,n}$ である．よって，$x \in \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$ である．ゆえに，$I \subseteq \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$ である．この逆向きの包含を示す．$y \in \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$ とすると，ある自然数 m, n に対して $y \in A_{m,n} = [1/m, 1-1/n] \subseteq I$ となる．よって，$I \supseteq \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$ である．以上から，$I = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$ である． □

演習 4.7. 自然数 n に対して，

$$A_n = \begin{cases} \{1, 2, \dots, n\} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \emptyset & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定める．例 4.8 と同じ記法を利用すると，任意の自然数 k に対して

$$\begin{aligned} A_k^+ &= A_k \cup A_{k+1} \cup \cdots = \mathbb{N}, \\ A_k^- &= A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \subseteq A_{2k+1} = \emptyset \end{aligned}$$

となる．よって，$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^+ = \mathbb{N}$ に対して $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^- = \emptyset$ である． □

演習 4.8. まず $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \subseteq \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j)$ を示そう．$x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ とすると，任意の $i \in I$, $j \in J$ に対して $x \in A_i \subseteq A_i \cup B_j$ となるので，$x \in \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j)$ である．同様に，$x \in \bigcap_{j\in J} B_j$ とすると，任意の $i \in I$, $j \in J$ に対して $x \in B_j \subseteq A_i \cup B_j$ となるので，$x \in \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j)$ である．よって，いずれにせよ $x \in \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j)$ である．ゆえに，$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \subseteq \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j)$ である．

次に $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \supseteq \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j)$ を示す．$y \in \bigcap_{i\in I, j\in J} (A_i \cup B_j)$, $y \notin \bigcap_{i\in I} A_i$ であれば $y \in \bigcap_{j\in J} B_j$ であること示せばよい．$y \notin \bigcap_{i\in I} A_i$ なので，$y \notin A_i$ となる $i \in I$ が存在する．一方，どの $j \in J$ についても $y \in A_i \cap B_j$ であるが，$y \notin A_i$ なので，$y \in B_j$ である．ゆえに，$y \in \bigcap_{j\in J} B_j$ である． □

演習 4.9. $A = \bigcap_{i\in I} A_i$, $u, v \in A$ とおく．どの $i \in I$ についても $u, v \in A_i$ であるが，A_i は閉じているから $uv \in A_i$ である．これが全ての i について成り立つから，$uv \in A$ である．したがって，A は閉じている．

閉部分集合らの和集合は必ずしも閉じていない．例えば，$\Sigma = \{a, b, \cdots\}$ として，A を長さが偶数である文字列の全体，B を長さが 3 の倍数である文字列の全体とする．連接文字列の長さは $|uv| = |u| + |v|$ で与えられるので，A, B は共に閉じている．しかし，$aa \in A$, $bbb \in B$ に対して連接文字列 $aabbb$ は $A \cup B$ に属していない．ゆえに，$A \cup B$ は閉じていない． □

演習 4.10. (1) $A_1, \dots, A_n$ を $\mathbb{N}$ の補有限部分集合とする．各々の A_i は補有限なので，ある自然数 N_i 以上の全ての自然数は A_i に含まれている．N を $N_1, N_2, \dots, N_n$ らの中で最も大きな自然数とする．N 以上の任意の自然数 n を考える．どの $1 \leq i \leq n$ についても $n \geq N \geq N_i$ だから，$n \in A_i$ である．よって，$n \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ である．したがって，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ も補有限である．

(2) 任意の自然数 n について，A_n を n 以上の自然数の全体とする．これらは全て $\mathbb{N}$ の補有限部分集合である．$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．どの自然数 n についても，$n \notin A_{n+1}$ だから，全ての A_n に共通して属する自然数は存在しない．よって，$A = \emptyset$ であるが，これは補有限部分集合ではない． □

演習 4.11. (a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B^{\mathrm{c}} = \emptyset$ について: $x \in A \cap B^{\mathrm{c}}$ であれば，$x \in A$ かつ $x \notin B$ なので，$A \not\subseteq B$ である．これの対偶から，$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B^{\mathrm{c}} = \emptyset$ が成り立つ．

(b) $A\cap B^c=\emptyset \Rightarrow B^c\subseteq A^c$ について: $B^c\not\subseteq A^c$ とすると, $x\in B^c$, $x\notin A^c$ となる x が存在する. $x\notin A^c$ だから $x\in A$ であり, これと $x\in B^c$ を合わせると $x\in A\cap B^c$ であり, したがって $A\cap B^c\neq\emptyset$ である. これの対偶から, $A\cap B^c=\emptyset\Rightarrow B^c\subseteq A^c$ が言える.

(c) $B^c\subseteq A^c\Rightarrow A\setminus B=\emptyset$ について: $x\in A\setminus B$ となる x があれば, $x\in A$ (つまり $x\notin A^c$) かつ $x\notin B^c$ となるので, $B^c\not\subseteq A^c$ である. これの対偶から, $B^c\subseteq A^c\Rightarrow A\setminus B=\emptyset$ が言える.

(d) $A\setminus B=\emptyset\Rightarrow A\subseteq B$. $A\not\subseteq B$ とすると, $x\in A$, $x\notin B$ となる x が存在するが, そうすると $x\in A\setminus B$ となるので, $A\setminus B\neq\emptyset$ である. これの対偶から, $A\setminus B=\emptyset\Rightarrow A\subseteq B$ が成り立つ. □

演習 4.12. (a) $A\setminus(A\setminus B)\subseteq A\cap B$ について: $x\in A\setminus(A\setminus B)$ とすると, $x\in A$ かつ $x\notin A\setminus B$ である. ここで $x\notin B$ とすると, $x\in A$ と合わせて $x\in A\setminus B$ となり, x の選び方に反する. よって, $x\in B$ である. これと $x\in A$ から $x\in A\cap B$ となる.

(b) $A\setminus(A\setminus B)\supseteq A\cap B$ について: $x\in A\cap B$ とすると, $x\in A$, $x\notin A\setminus B$ なので, $x\in A\setminus(A\setminus B)$ である.

演習 4.13. (1) 反例: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4\}$, $B'=\{3,5\}$ とするとき, $A\setminus B=A\setminus B'=\{1,2\}$ であるが, $B\neq B'$.

(2) $B,B'\subseteq A$, $A\setminus B=A\setminus B'$ と仮定する. $x\in B$ とする. $B\subseteq A$ なので, $x\in A$ でもある. $x\notin B'$ とすると, $x\in A\setminus B'=A\setminus B$ であり, したがって $x\in B$ となり矛盾する. よって, $x\in B'$ である. これで $B\subseteq B'$ が示された. 対称的な議論で $B\supseteq B'$ も言えるので, $B=B'$ である. □

演習 4.14. $x\in A\setminus B$ とおく. $x\in A$ なので, $A\subseteq C$ から $x\in C$ でもある. $x\notin B$ と $D\subseteq B$ から $x\notin D$ でもある. ゆえに, $x\in C\setminus D$ である. 以上から, $A\setminus B\subseteq C\setminus D$ である. □

演習 4.15. (1) (a) $A=B\Rightarrow A\triangle B=\emptyset$ について: $A\triangle B\neq\emptyset$ とすると, $x\in A\setminus B$ となる x が存在するか, または $y\in B\setminus A$ となる y が存在するが, 前者の場合は $A\not\subseteq B$, 後者の場合は $B\not\subseteq A$ なので, いずれにせよ $A\neq B$ である. よって, $A=B$ であれば $A\triangle B=\emptyset$.

(b) $A=B\Leftarrow A\triangle B=\emptyset$ について: $x\in A$ とする. $x\notin B$ とすると, $x\in A\setminus B=\emptyset$ となり矛盾するから, $x\in B$. よって, $A\subseteq B$. 対称的な議論で $A\supseteq B$ も言えるので, $A=B$.

(2) (a) $A\triangle B=B\Rightarrow A=\emptyset$ について: $A\neq\emptyset$ と仮定して, 任意の $x\in A$ をとる. $x\in B$ とすると, 仮定から $x\in A\setminus B$, したがって $x\notin B$ となるが, これは $x\in B$ に反する. よって $x\notin B$ である. これと $x\in A$ から, $x\in A\setminus B$ だから, $A\setminus B\neq\emptyset$ である. この対偶から, $A\triangle B=B\Rightarrow A=\emptyset$ が成り立つ.

(b) $A\triangle B=B\Leftarrow A=\emptyset$ について: $A=\emptyset$ であれば, $A\setminus B=\emptyset$, $B\setminus A=B$ なので, $A\triangle B=\emptyset\cup B=B$.

(3) $x\in A\cap B$ ならば, $x\in A$ かつ $x\notin A\triangle B$ だから, $x\in A\setminus(A\triangle B)$ である. よって, $A\setminus(A\triangle B)\supseteq A\cap B$ である. この逆の包含を示す. $y\in A\setminus(A\triangle B)$ とすると, まず $y\in A$ であるが, ここで $y\notin B$ ならば $y\in A\setminus B\subseteq A\triangle B$ となって $y\notin A\triangle B$ に反するから, $y\in B$, したがって $y\in A\cap B$ である. よって, $A\setminus(A\triangle B)\subseteq A\cap B$ でもある.

演習 4.16. (a) $A\cap(B\triangle C)\subseteq(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ であること: $x\in A\cap(B\triangle C)$ とすると, (i) $x\in A$, $x\in B$, $x\notin C$ または (ii) $x\in A$, $x\notin B$, $x\in C$ のいずれか一方が成り立つ. (i) のときは $x\in A\cap B$, $x\notin A\cap C$ なので, $x\in(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ である. 同様に, (ii) のときは $x\notin A\cap B$, $x\in A\cap C$ なので, $x\in(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ である. よって, いずれにせよ $x\in(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ である.

(b) $A\cap(B\triangle C)\supseteq(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ であること: $y\in(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ とすると, (iii) $y\in A\cap B$, $y\notin A\cap C$ または (iv) $y\notin A\cap B$, $y\in A\cap C$, のうちのいずれか一方が成り立つ. (iii) のときは,

$y \in A \cap B$ だから $y \in A$ であるが, 同時に $y \notin A \cap C$ なので $y \notin C$ でもある. $y \in A \cap B \subseteq B$ なので, $y \in B \setminus C \subseteq B \vartriangle C$ である. これと $y \in A$ を合わせて, $y \in A \cap (B \vartriangle C)$ を得る. (iv) についても, B と C の立場を入れ替えて同様に議論すれば $y \in A \cap (B \vartriangle C)$ が得られる. □

演習 4.17. (1) $\vartriangle$ の結合則から, $A \vartriangle (A \vartriangle B) = (A \vartriangle A) \vartriangle B = \emptyset \vartriangle B = B$.

(2) $\vartriangle$ の結合則から, $(A \vartriangle B) \vartriangle (B \vartriangle C) = A \vartriangle (B \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle \emptyset \vartriangle C = A \vartriangle C$.

(3) $x \in (A \vartriangle B) \cap (B \vartriangle C)$ ならば, $x \notin C \vartriangle A$ であることを示せばよい. $x \in A \vartriangle B$ なので, (i) $x \in A \setminus B$ または (ii) $x \in B \setminus A$ である. (i) のときは, $x \notin B$ と $x \in B \vartriangle C$ から $x \in C$ であり, これと $x \in A$ を合わせると $x \in C \cap A$, したがって $x \notin C \vartriangle A$ である. (ii) のときは, $x \in B$ と $x \in B \vartriangle C$ から $x \notin C$ であり, これと $x \notin A$ を合わせると $x \notin (C \cup A)$, したがって $x \notin C \vartriangle A$ である. □

演習 4.18. $A \subseteq B$ かつ $C \subseteq D$ であれば, 任意の $(x, y) \in A \times B$ について, $x \in A \subseteq C$ かつ $y \in B \subseteq D$ なので $(x, y) \in C \times D$, したがって $A \times B \subseteq C \times D$ である.

$A \times B \subseteq C \times D$ と仮定する. $a \in A$ とする. 仮定から $B \neq \emptyset$ なので, B は少なくとも一つの元 b を含む. $(a, b) \in A \times B$ だから, 仮定から $(a, b) \in C \times D$ でもあり, したがって特に $a \in C$ である. よって, $A \subseteq C$ である. 対称的な議論で, $A \neq \emptyset$ であることを用いて $B \subseteq D$ であることも証明できる. □

演習 4.19. (1) (a) $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ について: $A \times (B \cap C)$ の任意の元は (x, y) (ただし $x \in A$, $y \in B \cap C$) と書ける. $x \in A$, $y \in B$ だから, $(x, y) \in A \times B$ である. 同じく $x \in A$, $y \in C$ だから, $(x, y) \in A \times C$ でもある. よって, $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ である.

(b) $A \times (B \cap C) \supseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ について: $g \in (A \times B) \cap (A \times C)$ とする. $g \in A \times B$ なので, $g = (x_1, y_1)$ ($x_1 \in A$, $y_1 \in B$) と書ける. 同じく $g \in A \times C$ なので, $g = (x_2, y_2)$ ($x_1 \in A$, $y_2 \in C$) と書ける. $(x_1, y_1) = g = (x_2, y_2)$ なので, $x_1 = x_2 \in A$, $y_1 = y_2 \in B \cap C$ である. よって, $g = (x_1, y_1) \in A \times (B \cap C)$ である.

(2) (a) $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ について: $A \times (B \cap C)$ の任意の元は (x, y) (ただし $x \in A$, $y \in B \cup C$) と書ける. $y \in B$ のときは, $x \in A$ と合わせて $(x, y) \in A \times B$ である. 同じく $y \in C$ ならば $(x, y) \in A \times C$ である. よって, $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ である.

(b) $A \times (B \cup C) \supseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ について: $A \times B$ の任意の元は (x, y) ($x \in A$, $y \in B$) と書ける. $x \in A$, $y \in B \subseteq B \cup C$ だから, $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ である. よって, $A \times (B \cup C) \supseteq A \times B$ である. 同様にして $A \times (B \cup C) \supseteq A \times C$ も得られる. ゆえに, $A \times (B \cup C) \supseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ である.

演習 4.20. (1) (a) $(A \times B) \cap (A' \times B') \subseteq (A \cap A') \times (B \cap B')$ について: $g \in (A \times B) \cap (A' \times B')$ とする. $g \in A \times B$ なので, $g = (x, y)$ ($x \in A$, $y \in B$) と書ける. 同じく $g \in A' \times B'$ なので, $g = (x', y')$ ($x' \in A'$, $y' \in B'$) と書ける. $(x, y) = g = (x', y')$ だから, $x = x' \in A \cap A'$, $y = y' \in B \cap B'$ である. ゆえに, $g = (x, y) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$ である.

(b) $(A \times B) \cap (A' \times B') \supseteq (A \cap A') \times (B \cap B')$ について: $h \in (A \cap A') \times (B \cap B')$ とすると, $h = (x, y)$ ($x \in A \cap A'$, $y \in B \cap B'$) と書ける. $x \in A \cap A' \subseteq A$, $y \in B \cap B' \subseteq B$ なので, $h = (x, y) \in A \times B$ である. 同様にして $h = (x, y) \in A' \times B'$ であることも言える. よって, $h \in (A \times B) \cap (A' \times B')$ である.

(2) $g \in (A \times B) \cup (A' \times B')$ とおく. $g \in A \times B$ ならば, $g = (x, y)$ ($x \in A$, $y \in B$) と書けるが, $x \in A \subseteq A \cup A'$, $y \in B \subseteq B \cup B'$ なので, $g = (x, y) \in (A \cup A') \times (B \cup B')$ である. $g \in A' \times B'$ のときも同様.

(3) $A = \mathbb{Z}$, $B = \emptyset$, $A' = \emptyset$, $B = \mathbb{Z}$ とおく．すると，$(A \times B) \cup (A' \times B') = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ であるが，$(A \cup A') \times (B \cup B') = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \neq \emptyset$ である． $\square$

演習 4.21. $a = (a_x, a_y) \in A$ とする．$y = a_y \in Y$ に対して $(a_x, y) = (a_x, a_y) \in A$ であるから，$a_x \in A_X$ である．対称的に，$a_y \in A_X$ であることも言える．よって，$a = (a_x, a_y) \in A_X \times A_Y$ である．したがって，$A \subseteq A_X \times A_Y$ である．

$A \neq A_X \times A_Y$ となる事例: $X = Y = \mathbb{Z}$, $A = \{(x, y) \mid x - y \in 2\mathbb{Z}\}$ とおく．($2\mathbb{Z}$ は偶数の全体を表す.) 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して，$y = x - 2$ とおけば $x - y = 2 \in 2\mathbb{Z}$ なので，$(x, y) \in A$ である．よって，$x \in A_X$ である．これで $A_X = \mathbb{Z}$ が得られる．同様にして $A_Y = \mathbb{Z}$ であることも分かり，$A_X \times A_Y = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である．一方，$(1, 0) \notin A$ なので，$A \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である． $\square$

