数学の基礎 1　集合論・初級編 2

写像

東北大学データ駆動科学・AI 教育研究センター

最終更新: 2025 年 10 月 20 日

この巻で学習することの概要

数学では, 何らかの興味の対象物があるとき, 単にその対象物らを各々個別に扱うだけではなく, 複数の対象物らの関係性を調べることもよくある. 2 つの対象物の間を取り持つものは, 抽象的には写像として表現される. 写像とは高校数学でもよく出てきた関数に相当する概念であり, 一方の集合から入力を受け取るとそれに応じてもう一方の集合上へ出力値を吐き出す変換器のようなイメージでとらえられるものである. 集合と並んで, 写像は数学のあらゆるところで頻繁に用いられる共通語になっているので, 本巻では写像に関して数学で広く必要になる基礎知識を修得することが一番の目標になる. さらに, 数学で無限に多くの対象物を扱う際に現れる選択公理についても最後に簡単に触れておく.

Keywords　写像, 像と原像 (逆像), 単射・全射・全単射, 合成写像, 逆写像, 直積集合, 選択公理

予備知識　第 1 巻『集合と論理』の内容を理解していること.

Contents

1 写像

高校数学まででも, 1 次関数や 2 次関数に代表される多項式関数, 多項式を用いた分数形式で与えられる有理関数, 指数関数, 対数関数, 三角関数など様々な種類の関数が登場している. それらの関数はそれぞれ具体的な定義は違えども, どれも実数を入力として受け取れば, それに対応した実数値を返す変換器として働くところは共通している. もっとも, 全ての関数があらゆる実数を入力として受け取れるわけではない. 例えば, 対数関数 $\log x$ は正実数 x のみを入力として受け取るし, 有理関数 $x/(x^2-1)$ には $x=1$ と $x=-1$ は入力できない.

本巻のメインテーマである「写像」はこうした関数らの一般化にあたる概念である. 上記の関数たちの入力と出力は全て実数であったが, その制約を緩めて,「入力を一つ受け取って出力を一つ返す」という変換器の機能のみに注目するところから, 写像の導入を始めよう.

1.1 写像の定義

X, Y を集合とする. ($X=Y$ であってもよい.) X から Y への**写像**とは, X の各々の元 x について, それに対応する Y の元を一つ定める変換規則である. 写像は図 1 のように入力 $x \in X$ を受け取ってそれを出力 $f(x) \in Y$ に変換する変換器のイメージで捉えられる. 高校数学では, X と Y は共に $\mathbb{R}$ であるか, あるいはその部分集合であることが想定されていたが, ここではそのような制約はもはや撤廃され, X と Y は集合であれば何でもよい. 空集合の扱いについて少し微妙な問題があるが, それついてはもう少し後の補足 1.21 で触れる.

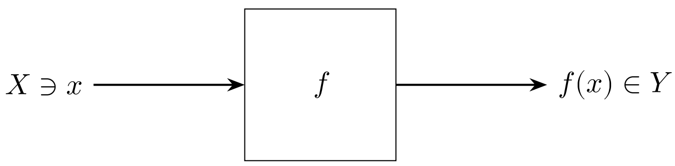


図 1 写像 $f: X \to Y$ のイメージ.

上で述べた写像の定義は複雑怪奇なものではなく, むしろ簡潔すぎて却って何だかよくわからないところ

☕ Coffee Break ☕

写像と関数

高校数学ではもっぱら「関数」(古い書き方では「函数」とも書く) という言葉が用いられていて,「写像」という言葉はほぼ見かけなかっただろう．しかし, 実際のところ, 概念的に両者には実質的な違いはなく, どちらも入力を受け取ってそれを出力に変換する変換器であることには変わりがない．違いがあるとすれば,「関数」は入出力が数値や数ベクトルの場合に好んで用いられる傾向があり, それに比べて「写像」はそのような制約を気にせず広く一般的に用いられるというところぐらいである．本シリーズではこれ以降, **写像と関数を同義語として扱い, 区別しない**ことにする.

がある．定義上, f が X から Y への写像であると言うときに必要かつ十分な要件は次の 3 つであることを理解しておけば十分である:

M1: どの $x \in X$ についても, f は x を Y **に属する元**に変換すること.

M2: なおかつ, f による x の変換結果は**唯一つに決まる**こと．変換結果が複数あったり, 全く存在しないことは許されない.

M3: f による変換結果は Y に属していること.

X は入力値の集合であり, f は集合 Y 上にその出力値を取るわけだが, 先に述べた通り X や Y は数やベクトルなど, いかにも '数学' 的なオブジェクトの集合である必要は全くない．例えば,

$$
\begin{aligned}
X &= \{\text{宮城}, \text{静岡}, \text{愛知}, \text{和歌山}, \text{福岡}\}, \\
Y &= \{\text{みかん}, \text{牛タン}, \text{ひつまぶし}, \text{明太子}, \text{海ぶどう}\}
\end{aligned}
$$

であるとき, $x \in X$ に対して, x の名物を $f(x)$ で表すことにすれば,

$$
\begin{aligned}
f(\text{宮城}) &= \text{牛タン}, \\
f(\text{静岡}) &= \text{みかん}, \\
f(\text{愛知}) &= \text{ひつまぶし}, \\
f(\text{和歌山}) &= \text{みかん}, \\
f(\text{福岡}) &= \text{明太子}
\end{aligned}
$$

という写像ができあがる．f に x を入力すれば, その x に見合う名物 $f(x)$ が Y の中から選ばれて出力されるというわけである．静岡と和歌山はどちらも「みかん」に変換されているが, このように同じ出力に変換される入力があってもよい．さらに,「海ぶどう」は実際には出力結果として現れないが, このように余分な出力値が想定されていても構わない．ただし, 本来あるべき出力値が欠落しているのはダメである．例えば, Y から「牛タン」を削除すれば, 宮城に対する出力が無くなってしまうのでダメである．仮に, 福岡でも愛知に対抗してひつまぶしが流行り始めたら, 福岡に対する出力値としてひつまぶしも許されることになるが, そうすると福岡に対する出力値が 2 つあることになり困ったことになる.

図 2 では, X から Y への写像 f と X から Y への写像になっていない変換規則 g の例をそれぞれ描いている．まず, g には次のような欠陥がある.

- $x_0 \in X$ に対して 2 つ以上の出力値があり, 要件 M2 に反している.
- $x_2 \in X$ に対応する出力値が Y の外にあり, 要件 M1 に反している.

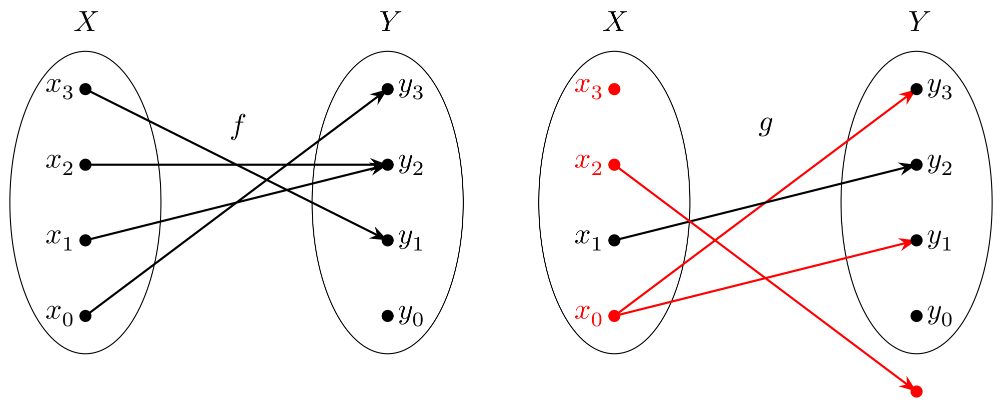


図 2　X から Y への写像 f と, X から Y への写像でない規則 g.

- $x_3 \in X$ に対応する出力値がなく, 要件 M2 に反している.

f でも次のような現象が見られるが, これは X から Y への写像としては問題無い.

- X の複数の元 x_1, x_2 が Y の同一の元に対応づけされている. (矢印がぶつかるところがある.) 写像の定義では, **相異なる入力に対して同じ変換結果が出力されることは禁止されていない**.
- Y の中で余っている元 y_0 がある. 写像の定義では, **Y の元が全て何らかの $x \in X$ に対する変換結果として現れることまでは要求されていない**.

f が集合 X から集合 Y への写像であることを

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y$$

などと書き表す. X を f の**始集合**または**始域**, Y を f の**終集合**または**終域**と呼び, それぞれ記号で

$$X = \operatorname{dom} f, \quad Y = \operatorname{codom} f$$

と書く.*1 ここで, $X = Y$ であってもよい. 写像 $f : X \to Y$ は任意の $x \in X$ を Y の元に変換するが, その元 y を

$$y = f(x)$$

と書いて, f による x の**像**または x での f の**値**と言う. $f(x) = y$ であることを $f : x \mapsto y$ とも書く. (細かいが, 矢印記号に注意! $x \to y$ ではなくて $x \mapsto y$ である.)

補足 1.1 (像の記法)　入力 x に対する写像 f の出力値は $f(x)$ と書かれることが最も普通で一般的であるが, fx のように括弧をつけずに書いたり, xf のように x を左に置いてそれに係る写像 f を右に置く記法が用いられることもある. あるいは, $\langle f, x \rangle$ のように括弧を使う記法が用いられることもある. どの記法も, 写像 f が x に '作用' して生じた結果を表すことに変わりはない.

さらに, ちょっとややこしいが, $f(x)$ という記法で関数 f そのものを表すこともある. (対数関数を $\log x$ と書くのはそのいい例である.) この記法に現れる x は f への入力を抽象的に表している '変数' であり, 具体的な入力値を表すものではない. $f(x)$ という表記を見たときに, それが関数 f そのものを

*1 始集合を**定義域**, 終集合を**値域**と呼ぶこともある. しかし, 定義域はともかく, 値域は後で定義される「像」の意味で用いられることが多い. 余計な混乱を避けるために本シリーズではもっぱら「終集合」「終域」という言葉を用いている.

表しているのか, 具体的な入力 x に対する値を表しているのかは, その時の文脈によく注意して見分ける必要がある. □

1.2 写像の相等

数学的なオブジェクトが定義されたときには, 2 つのオブジェクトがどのようなときに同一視され, どのようなときに互いに区別されるのかを明確にしておく必要がある. 2 つの集合 A, B が等しいとは, それらが全く同じメンバーで構成されているということだった. それは「集合とは物の集まりである」ということから考えてもごく自然な定義である. それでは, 2 つの写像が等しいとはどういうことだろう? 写像はつまるところ入力を出力に変える変換器だから, 次のように定義しておくのが自然だろう.

写像の相等

定義 1.2. 写像 f, g が等しい $(f = g)$ とは, 次の 3 条件が満たされることを言う:

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ である.
(2) $\operatorname{codom} f = \operatorname{codom} g$ である.
(3) 全ての $x \in \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ について $f(x) = g(x)$ である.

この定義の背後には, 写像は **(1) 始集合, (2) 終集合, (3) 入出力の対応関係の 3 つが揃って一つに確定する**という考えがある. この定義に従えば, 次の 2 つの写像 f, g はどちらも与えられた実数 x を x^2 に変換するところは同じだが, 終集合が異なるので互いに異なる写像であると認識される:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^2.$$

ここで, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数 (0 以上の実数) の全体である. 終集合の違いを気にしなくてもいい場面では, このような f と g を区別せずに考えることもできるが, ここでは余計な混乱を避けるために最も厳格な定義を採用しておく.

実際には, 写像を定義する際には, 始域や終域を明示せずに, 単に $f(x) = x^2 + x \log x + 1$ のような感じで入力 x とそれに対応する出力 $f(x)$ だけが明示されることもよくある. このような場合, もちろん細かい事情は前後の文脈に左右されるが, 始域と終域をなるべく広めに見ておくことが暗に仮定されていることがよくある. (例えば, この例の場合には始域は正実数の全体, 終域は $\mathbb{R}$ であると見なされる.) しかし, 後の第 3 節で述べる「単射」「全射」などの性質を考える場合には, 始域と終域を明確に意識しておくことが必要だし, また始域や終域を敢えて狭く見る (→例 1.10) こともある.

1.3 写像の実例

写像の定義は極めて簡潔かつ抽象的なので, イメージがつきづらいかも知れない. 高校数学で学んだ ‘関数’ たちは写像の代表例だが, それら以外の写像となるとあまりピンと来るものがない. そのような時には, やはり**具体例**をいろいろ見ておくことが有効である. ここでは, 数学でよく現れる代表的な事例も含めて, 写像 (関数) の具体例をいろいろ見ておくことにする.

♦ **例 1.3** 各自然数 n に対して, その約数の個数を返す変換器 f は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ 自身への関数である. $f(n) = 2$ であることと n が素数であることは同値である. よって, $f(n) = 2$ となる n は無限個ある. □

♦ **例 1.4**　X を $\mathbb{N}$ の有限部分集合の全体とするとき, 任意の $A \in X$ をその大きさ $f(A) = |A|$ (A が持つ元の個数) に変換する変換器 f は X から $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ への関数である. どの $A \in X$ も $\mathbb{N}$ の**有限**部分集合であり, したがって $f(A) = |A|$ は 0 以上の整数値であることに注意しておこう. このように, 入力値が集合である関数を考えることもよくある. 終域を $\mathbb{N}_0$ ではなく $\mathbb{N}$ にしてしまうと, 空集合に対する出力値 $f(\emptyset)$ がなくなるから困る. 出力値として ∞ を想定して終域を $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ に広げておき, $\mathbb{N}$ の無限部分集合 A に対しては $f(A) = \infty$ と定義しておくと, f の始域を冪集合 $2^{\mathbb{N}}$ に広げることができる. □

♦ **例 1.5**　出力値が集合の関数を考えることもできる. 例えば, 自然数 n の約数の全体を $g(n)$ とすれば, g は $\mathbb{N}$ から冪集合 $2^{\mathbb{N}}$ の中への写像である. 例えば, $g(1) = \{1\}$, $g(2) = \{1, 2\}$, $g(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ などという具合である. 例 1.3 の写像 f は, この写像 g を用いて $f(n) = |g(n)|$ と書ける. □

♦ **例 1.6**　ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の**ノルム**は

$$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

で定まる実数である. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ をそのノルム $\|x\|$ に変換する規則は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への写像である. ノルムは 0 以上の実数値なので, 終域は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (0 以上の実数の全体) へ狭めることもできる. また,

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

は与えられた 2 点間の直線距離を測る関数である. ここでも, d の終集合は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に置き換えることができる. また, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\langle x, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

は x, y の**内積**と呼ばれる量であるが, これは直積 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への関数である. ノルムや距離とは違って, 内積は負の値も取り得るので, その終集合を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に置き換えてはいけない. □

上の例 1.6 ではベクトルを入力とする関数としてノルムを挙げたが, このように直積集合を利用すれば, 実質的に複数の入力値を持つ関数や複数の出力値を持つ関数を作ることもできる. 形式的なことを言えば, 正確には複数の入力値や複数の出力値があるわけではなく, 1 つの入力が複数の ‘成分’ を持ち, 1 つの出力が複数の ‘成分’ を持っているというだけのことである.

♦ **例 1.7** (定数写像)　Y の任意の元 c を予め決めておき, 全ての $x \in X$ について $f : x \mapsto c$ と定める. これも X から Y への写像であるが, このように全ての x の像 $f(x)$ が同じであるとき, f は**定数写像**であると言う.*2 図 3 の写像 f は全ての $x \in X$ について $f(x) = c$ である定数写像である. □

♦ **例 1.8** (恒等写像)　各々の $x \in X$ をそれ自身に ‘変換’ する写像を $\epsilon : X \to X$, $x \mapsto x$ と書いて, これを X 上の**恒等写像**と言う.*3 図 4 は X 上の恒等写像を描いている. 恒等写像は入力された x をそのまま出力するだけで実質的には**何もしない変換器**であるが, だからと言って役立たずというわけでは決してない. 数学をうまく記述するためには, むしろ不可欠な道具である. □

*2 $f(x) = c$ は数とは限らないが, 言葉としては ‘定数写像’ とか ‘定値写像’ などと言う. 大切なことは, 全ての入力に対して出力が全て同じというところである.

*3 ϵ の代わりに 1 や id など, 他の記号を用いることもよくある. id は恒等写像を意味する idetity map の頭文字である.

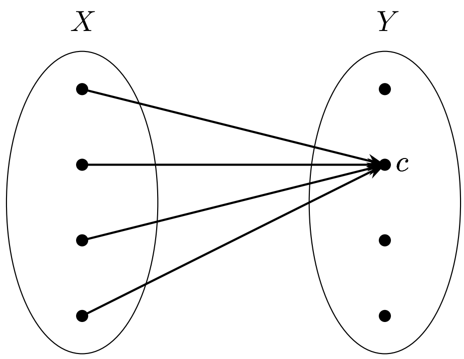


図 3　X から Y への定数写像のイメージ．全ての矢印が 1 点 c に集中している．

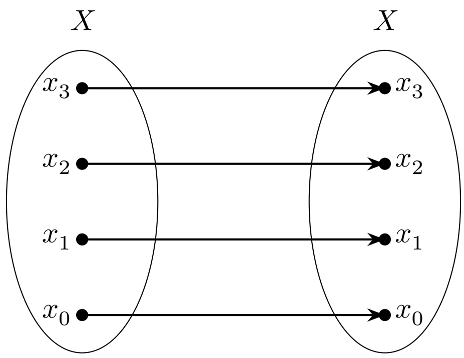


図 4　X 上の恒等写像 ϵ.

♦ **例 1.9** (包含写像)　$X \subseteq Y$ であるとき, 任意の $x \in X$ をそのまま Y の元としての x に変換する写像 $f : X \to Y,\ x \mapsto x$ を考えることができる．このような写像を**包含写像**と言う．例えば, 任意の整数 x をそのまま有理数としての x に変換すれば包含写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ が生じる.[*4] $X = Y$ であるときの包含写像は例 1.8 で述べた恒等写像である． □

♦ **例 1.10** (写像の制限と拡張)　$f : X \to Y$ を写像, $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ とし, 全ての $x \in X'$ について $f(x) \in Y'$ であると仮定する．このとき, 各々の $x \in X'$ を $f(x) \in Y'$ に変換する写像 $f' : X' \to Y'$ が生じる．この写像 f' は, 実質的には f の始集合と終集合をあえて狭く見ただけのものである．f' のことを f を**制限した写像**と言い, f' から見て f はその**拡張**であるとも言う．写像の制限では, 始域の制限を考えることが多いが, それだけではなくて終域の制限を考えることもある． □

♦ **例 1.11** (集合の定義関数)　X を集合, A をその部分集合とする．任意の $x \in X$ について,

$$\chi_A(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

とおく．χ_A は X から集合 $\{0, 1\}$ への写像であり, X における A の**定義関数**と言う.[*5] $A = \emptyset$ であるためには, χ_A が定数関数 0 であることが必要十分である．また, $A = X$ であるためには, χ_A が定数関数 1

[*4] プログラミングが得意な人は, 整数型数値を (その値自身を変えることなく) 有理数型数値に変換する写像だと思ってもいいだろう．

[*5] **指示関数**, **特性関数**などとも呼ばれる．

であることが必要十分である. 一般に, X の部分集合 A, B および元 $x \in X$ について,

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap B}(x) &= \chi_A(x)\chi_B(x), \\
\chi_{A\cup B}(x) &= 1-(1-\chi_A(x))(1-\chi_B(x)), \\
\chi_{A\setminus B}(x) &= \chi_A(x)(1-\chi_B(x)), \\
\chi_{A\triangle B}(x) &= \chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_A(x)\chi_B(x)
\end{aligned}$$

が成立する. □

♦ **例 1.12** (多項式関数) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ($a_n \neq 0$) を実数係数の n 次多項式とする. 任意の実数 s に対して, f の変数 x を s で置き換えて計算される値

$$f(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_ns^n \in \mathbb{R}$$

を f に $x = s$ を**代入した値**と言う. f は任意の実数 s を $f(s)$ に変換すると考えれば写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定まる. f が定数項 a_0 しか持たない多項式ならば, この関数は定数関数 a_0 と同じである. やかましいことを言えば, 多項式 f とそれが定める関数とは概念上別個のものである. (多項式はあくまで一つの式であり, 一方で関数は変換器である.)

解析学では, 多項式ではなく**無限級数**を用いて関数を定義することもよくある. 例えば,

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

は $|x| < 1$ を満たす範囲の x で収束するから, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ を始集合とし, $\mathbb{R}$ を終集合とする関数を与えていると考えることができる.*6 任意の $x \in D$ について級数 $p(x)$ は $1/(1-x)$ に収束するから, p が与える関数は $x \mapsto 1/(1-x)$ と書ける. □

♦ **例 1.13** 微分積分学では, 実数の開区間 (a, b) (ただし $a < b$) 上で定義される実数値関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ に対して, 点 $c \in (a, b)$ において極限値

$$f'(c) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

が存在するとき, f は点 c において**微分可能**であると言い, 極限値 $f'(c)$ を f の c における**微分係数**と呼ぶ. $D = \{c \in (a, b) \mid f$ は c において微分可能$\}$ とするとき,*7 任意の $c \in D$ を $f'(c)$ に変換する写像 $f' : D \to \mathbb{R}$ が生じるが, これを f の**導関数**と言う. 導関数 f' は入力 c に対して微分係数 $f'(c)$ を出力するので, 入力 c は f がそこで微分可能であるような点でなければならず, つまり $c \in D$ でなければならない. □

♦ **例 1.14** (数列と行列) **数列**とは, 数が自然数による番号付けによって一列に並んだものを言う. これをもう少し正確に言えば, $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ (あるいは $\mathbb{C}$) への写像 a のことであると理解できる. 任意の番号 $n \in \mathbb{N}$ に対する像 $a(n)$ が数列 a の第 n-項に当たり, それが a_n と書かれることもよくある. 場合によっては番号付けが 0 から始まる列を考えることもあれば, 有限個の項のみから成る数列を考えることもあり得るが, **数列は写像である**と見なす考え方の基本は同じである.

*6 正確には, 無限級数とそれが与える関数とは別々の概念である.
*7 ややこしい話だが, f によっては $D = \emptyset$ となる場合があり得る.

行列とは, 成分が縦横に矩形状に配置されたものであるが, これも一つの写像として理解できる. 例えば, 実数を成分とする (m,n)-行列は直積集合 $\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}$ から $\mathbb{R}$ (あるいは $\mathbb{C}$) への写像 A のことであると考えればよい. 任意の番号組 (i,j) に対する像 $A(i,j)$ が A の (i,j)-成分に当たる. □

♦ **例 1.15** (集合演算) 第 1 巻『集合と論理』で学習した集合演算も写像と見ることができる. 例えば, 任意の集合 X 上で, 2 つの部分集合から成る順序組 (A,B) $(A=B$ でもよい$)$ を共通部分 $A\cap B$ に変換する規則は, 直積 $2^X\times 2^X$ から 2^X への写像である. (2^X は X の冪集合を表す.) 共通部分の代わりに和集合, 差集合, 対称差を使っても同様に考えることができる. また, 任意の部分集合 A をその補集合 $A^{\mathrm{c}}=X\setminus A$ に変換すれば 2^X から 2^X 自身への写像が得られる. □

♦ **例 1.16** (二項演算) X を集合, $\circ\colon X\times X\to X$ を直積 $X\times X$ から X への写像とする. $\circ$ は X の 2 個の元から成る順序組 (x,x') $(x=x'$ でもよい$)$ を入力として X の元 $\hat{x}$ を一つ出力する装置であるが, これを「x と x' を '演算' することで $\hat{x}$ を生成する」という規則だと解釈できる. そこで, このような写像 $\circ$ を X 上の**二項演算**または単に**演算**と呼ぶ. 例えば, 上の例 1.15 から, 冪集合 2^X 上では共通部分 $\cap$, 和集合 $\cup$, 対称差 $\triangle$ などの集合演算を二項演算と見なすことができる.

二項演算については, 出力 $\circ(x,x')$ のことを, $\circ$ を中央に置いて $x\circ x'$ と書く記法が一般的である. ($\circ$ をこの演算の**演算子**と呼ぶ.) 演算子を省略して, $x\circ x'$ を単に xx' と書く記法も広く使われている. □

♦ **例 1.17** (多価写像) 有理数 p/q を整数 $p+q$ に変換する規則 h を考える. h は確かに有理数を整数に変換するが,

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=1+2=3,\ h\left(\frac{2}{4}\right)=2+4=6,\ h\left(\frac{3}{6}\right)=3+6=9,\dots$$

のように, 単一の値 $x=1/2=2/4=3/6=\cdots$ に対する像 $h(x)$ が複数 (実際には無限個) ある. このような変換器を**多価写像**と言う. 普通の意味での写像では, x に対応する像 $f(x)$ はちょうど一つなので, 多価写像に対比して**単価写像**と言う. 本シリーズでも, **特に断らない限り, 単に写像と言えばもっぱら単価写像のことを指している**. □

♦ **例 1.18** X を駅の全体, $Y=\mathbb{N}\cup\{0\}$ とおく. この例はそれ自体があまり厳格なものではない感覚的な例なので,「駅とは何か」などと神経質に考える必要はなく, 例えば JR 線の駅を考えているという程度に気軽に思っておけばいい.

$x\in X$ に対して, 東京駅から x 駅への運賃を $f(x)$ 円とする. この規則 f は X から Y への多価写像である. ここで「多価」と言うのは, 東京駅から x 駅への経路は一般には複数あり, 運賃は経路によって変わる可能性があるからである. 例えば, 東京→名古屋を東海道本線経由で行けば 6,380 円であるが, 中央本線を経由すれば 6,600 円である.

そこで, $f(x)$ の定義を少し変えて, $f(x)$ は東京駅から x 駅への最安運賃であるとすると, これは X から Y への単価関数として定まる. f が単価であるのは, 東京駅から x 駅への最安経路自体は必ずしも一意的[*8]ではないが最安経路の運賃は一意的だからである. なお, $f(\text{東京})=0$ である.

集合 X の定義を少し変えて,

$$X=\{(x,p)\mid x\ \text{は駅},\ p\ \text{は東京駅から}\ x\ \text{駅への経路}\}$$

[*8]「一意的」とは日常会話ではなかなか聞かない表現だが, 要するに「**唯一つ**」であるという意味である.

とおく．そして, $(x,p) \in X$ に対して, $f(x,p)$ は東京駅から x 駅へ経路 p に沿って行くときの運賃を表すものとする．この状況では, 目的地 x だけでなく経路 p が入力の一部に指定されているので, $f(x,p)$ の値は (x,p) から一意的に決まる．よって, この規則 f は X から Y への単価関数として定まっている． □

♦ **例 1.19** X, Y を集合とし, X から Y への写像の全体を Y^X で表す．このように, **写像が集まって一つの集合を構成することもできる**．それはさておき, 任意の写像 $f \in Y^X$ と $x \in X$ の組 (f,x) を $f(x) \in Y$ に変換する規則は, 直積集合 $Y^X \times X$ から Y への写像である．

通常は, x を写像 f に入力すれば出力 $f(x)$ が出てくるという見方をするが, この例のような視点を持てばそれとは違った見方をすることもできる．つまり, x を固定しておいて, f を入力すれば $f(x)$ が生み出されるという見方も可能である．この考え方では, 各々の $x \in X$ が写像 $Y^X \to Y\ (f \mapsto f(x))$ を定めていると考えることになる．これは次の例 1.20 で述べる「カリー化」の特別な場合に当たる． □

♦ **例 1.20** (カリー化) X, Y, Z を集合, $f : X \times Y \to Z$ を写像とする．任意の $y \in Y$ に対して, f から次の写像 $c_y : X \to Z$ が生じる:

$$c_y(x) \overset{\text{def}}{=} f(x,y), \qquad \forall x \in X.$$

言わば, f において y を固定したまま x のみを入力と見なした写像が c_y である．このように, $y \in Y$ を写像 c_y に変換する写像 $c : Y \to Z^X$ が定まる．(Z^X は X から Z への写像の全体集合を表す→例 1.19.) この c を f の**カリー化** (Currying) と呼ぶ.[*9] 逆に, 写像 $c : Y \to Z^X$ に対して, 写像 $f : X \times Y \to Z$ が

$$f(x,y) \overset{\text{def}}{=} c_y(x)$$

によって定まる．ここで, $c_y = c(y)$ は集合 Z^X の元なので, それは X から Z への写像であることに注意しておこう．c からこのようにして f を復元する操作はカリー化の逆操作に当たる．

この例は結構ややこしいので, よく注意して考えないと混乱するかも知れない．頭が混乱しそうな場合は, 簡単な具体例で考えてみよう．$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ が $f(x,y) = x + y$ という関数であったとき, そのカリー化 c は $y \in \mathbb{Z}$ を $x \mapsto x + y$ で定まる関数 $c_y : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に変換する．y に対する c の出力値は関数 c_y である．例えば, c_1 は入力 x を $x + 1$ に変換する関数である． □

▶ **演習 1.1** 次のそれぞれ定義は, X から Y への (単価) 写像を定める定義としては妥当ではない．何がいけないのかをそれぞれ指摘せよ．

(1) $X = \mathbb{C}$, $Y = \mathbb{C}$, $f(z) = \sqrt{z}$. ただし, $\sqrt{z}$ は $z = w^2$ となる複素数 w のことを表している．
(2) $X = 2^{\mathbb{Z}}$ ($\mathbb{Z}$ の冪集合), $Y = \mathbb{Z}$, $f(A) = |A|$.
(3) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Q}$, $f(x,y) = x/y$.
(4) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Q}$, $f(x)$ は x 以下で最大の有理数．

▶ **演習 1.2** (1) $X = \{1, 2, 3\}$ から $Y = \{a, b\}$ への写像を全て列挙せよ．(図や表に描いても良いし, 式で記述してもよい.)
(2) X, Y を空でない有限集合とするとき, X から Y への写像は全部で $|Y|^{|X|}$ 個あることを示せ．

[*9] アメリカの数学者 Haskell Curry に因む．彼の名前はプログラミング言語の名前 (Haskell) にもなっているが, Haskell ではまさにカリー化の考え方が用いられている．

1.4 写像とグラフ

写像とは「2 つの集合の間の入出力対応規則である」という説明をしたが, 対応規則とは何かがはっきりしないせいで, これは少々歯切れの悪い説明になっているかも知れない. そこで, ここでは写像のもう一つの導入方法として, 写像を「グラフ」によって定義するという考え方を述べよう.

$f : X \to Y$ を写像とするとき, 直積 $X \times Y$ の部分集合

$$G_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \tag{1}$$

を f の**グラフ**と言う. 写像のグラフと言えば, 図 5 のように直線や曲線など図に描かれたものが思い浮かぶかもしれないが, これは $f(x) = y$ を満たす点 (x, y) の全体を '平面' $X \times Y$ 上でプロットするとこの図のようになるということである. 普段はこの図のことを指して f のグラフと呼んでいるが, ここでは集合 G_f

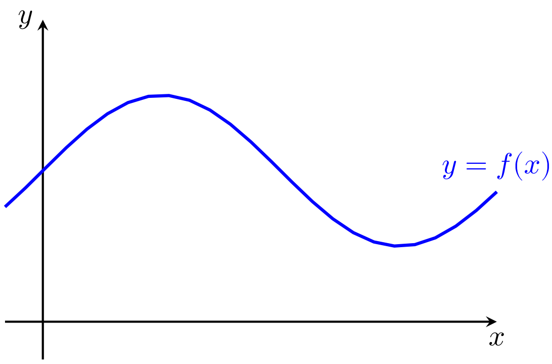


図 5 写像 $f : X \to Y$ のグラフ (イメージ図).

そのものを f のグラフと呼び, 図 5 はそれを図で描いたものだという立場をとっている. そもそも, 関数のグラフはいつでも図に描けるというわけではない. 例えば, **Dirichlet 関数**と呼ばれる次の関数

$$\delta : \mathbb{R} \to \{0, 1\}, \qquad \delta(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

をグラフに描こうとしても, せいぜいその雰囲気をラフに描くことしかできず, 正確な描写はできない. 数直線上では, どんな小さな隙間にでも, 有理数と無理数が無数にひしめきあっていて δ はその上で 0 と 1 の間を激しく振動するからである.

写像からグラフが定まるが, それとは逆に, グラフから写像を定めることもできる. G を $X \times Y$ の部分集合で次の条件 **G** を満たすものとする:

G: 各々の $x \in X$ に応じて, $(x, y) \in G$ となる $y \in Y$ が**唯一つ**存在する.

このとき, 各々の $x \in X$ をその相方 y に変換する写像 $f : X \to Y$ が定まる. そして, f のグラフは G 自身である. 条件 **G** で y が唯一つであるという制約を外して y が 2 個以上あってもいいことにすると, f が多価写像になることを許したことになる.

このように, X から Y への写像と, $X \times Y$ の部分集合で条件 **G** を満たすものは表裏一体の関係にあり, **表現方法は違っても, どちらも同じ数学的対象を表している**と考えてよい. 特に, 写像 $X \to Y$ は $X \times Y$ の特殊な部分集合であると考えると, **写像も集合の一種である**と理解できることになる.

補足 1.21 (空写像)　ここまでは,「X から Y への写像」というときには, 暗黙に X, Y は空集合ではないことを前提にしてきた. ここで, X から Y への写像のことを,「直積 $X \times Y$ の部分集合 G で上記の条件 $\mathbf{G}$ を満たすもの」というように理解すると, X や Y が空集合である場合についても「X から Y への写像」を考えることができる.

$X = \emptyset$ または $Y = \emptyset$ であるときには, $X \times Y = \emptyset$ なので, $X \times Y$ の部分集合自体が $G = \emptyset$ しかない. よって, $G = \emptyset$ が条件 $\mathbf{G}$ を満たすかどうかが問題であるが, 結論だけを言えば次のようになる:

- $X = \emptyset$ のときは, ($Y = \emptyset$ か否かに関係なく) $G = \emptyset$ が条件 $\mathbf{G}$ を**空虚に**満たしている. よって, この場合は「X から Y への写像は**空写像** $G = \emptyset$ ただ一つである」と考えられる.
- $X \neq \emptyset$ かつ $Y = \emptyset$ であるときは, $G = \emptyset$ は条件 $\mathbf{G}$ を満たさない. したがって, この場合は X から Y への写像は存在しない. □

1.5 関数とアルゴリズム

f が集合 X から集合 Y への関数であると言う場合, 必要なことは各々の入力 $x \in X$ に対して決まった一つの出力値 $f(x) \in Y$ が**存在する**ということだけである. アルゴリズムも入力を受け取って何らかの出力を返すという点では関数に類似しているが, アルゴリズムでは入力を受け取った後の具体的な動作にも意味があることに対して, 関数の視点では f がどのようにして入力 x から出力 $f(x)$ を生成しているのかという内部事情は関知せず, あくまで入出力の対応のみが問題である.

例えば, 与えられた 2 つの整数 a, b に対する最大公約数を求める方法としては, Euclid の互除法と呼ばれる手法や素因数分解を利用する手法など複数通りあり, それぞれが別のアルゴリズムである. (例えば, 両者には計算量的な効率性にはかなり大きな差異があり, Euclid の互除法の方が素因数分解法よりもはるかに効率的である.) それに対して, 入力 (a, b) と出力 $\gcd(a, b)$ の対応のみを気にして, $\gcd(a, b)$ がどのような手続きで生成されるのかまでは気にしないのが関数の視点である.

極端な話, 関数では x と $f(x)$ との対応関係がつけばそれでいいのであって, x から $f(x)$ の値を求めるアルゴリズムが存在しなくても構わない. 例えば, 自然数に関する「Q 数」という概念が既に定まっているとき, 任意の自然数 x に対して

$$q(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が Q 数であるとき}) \\ 0 & (x \text{ が Q 数でないとき}) \end{cases}$$

と定義すれば $\mathbb{N}$ から集合 $\{0, 1\}$ への関数 q が正しく定まる. ここで, 与えられた自然数 x が Q 数どうかを判定するアルゴリズムの有無はどうでもいいが,「Q 数」という概念が数学的に正しく定まっていることは必要である.

2 像と逆像

2.1 像

$f: X \to Y$ を写像とする. $x \in X$ に対して, f の下で x に対応する像を $f(x)$ と書いた. これを一般化して, 部分集合 $A \subseteq X$ に対して, Y の部分集合

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(a) \text{ となる } a \in A \text{ が存在する}\} \tag{2}$$

を f による A の**像**と呼ぶ．$f(A)$ は x を A 全体で動かしたときに生じる像 $f(x)$ の集まりだから，式 (2) の代わりに $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ とも書く．始集合全体に対する像を

$$\operatorname{img} f = f(X)$$

と書いて，これを f の**像**と呼ぶ．$\operatorname{img} f$ は終集合 $\operatorname{codom} f$ の部分集合であるが，$\operatorname{img} f = \operatorname{codom} f$ とは限らない．

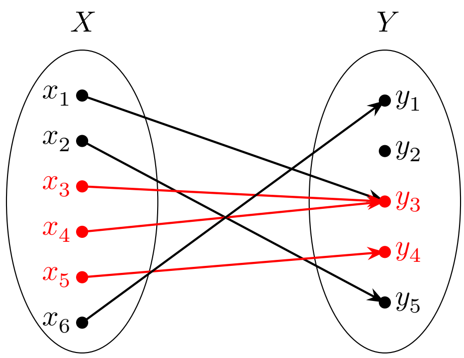


図 6　写像 $f : X \to Y$ による $A = \{x_3, x_4, x_5\}$ の像 $f(A) = \{y_3, y_4\}$.

見方を変えれば，f は X の冪集合 2^X から Y の冪集合 2^Y への写像を与えていると考えることもできる．つまり，入力は X の部分集合 A であり，それに対する出力は像 $f(A)$ だと見ればいい．

♦ **例 2.1**　図 6 では，$A = \{x_3, x_4, x_5\}$ の像 $f(A)$ は $\{y_3, y_4\}$ である．$y_3 \in f(A)$ であるのは，$x_3 \in A$ について $y_3 = f(x_3)$ だからである．$y_3 \in f(A)$ であると言うには，このような x_3 の存在が根拠となる．A に属さない元 x_1 についても $y_3 = f(x_1)$ となっているが，それは差し支えない．**A に属さない x については $f(x) \in f(A)$ であってはいけないなどという制約はない**からである．言い換えれば，$f(x) \in f(A)$ **であっても $x \in A$ であるとは限らない**ということである．

どの $x \in A$ についても $y_5 \neq f(x)$ だから，$y_1 \notin f(A)$ である．一方，$y_5 = f(x_2)$ なので，$y_5 \in \operatorname{img} f$ ではある．$y_2 = f(x)$ となる x は存在しないので，$y_2 \notin \operatorname{img} f$ である．f の像は $\operatorname{img} f = \{y_1, y_3, y_4, y_5\}$ であり，終集合 $Y = \operatorname{codom} f$ よりも真に狭い．□

$f(x) = y$ は $f(\{x\}) = \{y\}$ と同じ意味である．図 6 では，$A = \{x_3, x_4\}$ に対して $f(A) = \{y_3\}$ であるが，これを $f(A) = y_3$ や $f(x_3, x_4) = y_3$ などと略して書くことは普通はしない．

♦ **例 2.2**　例 1.3 の写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を考える．$A = \{2, 4, 5, 9, 10, 12\}$ に対して，

$$f(2) = 2,\ f(4) = 3,\ f(5) = 2,\ f(9) = 3,\ f(10) = 4,\ f(12) = 6$$

だから，$f(A) = \{2, 3, 4, 6\}$ である．$|A| = 6$ であるのに対して $|f(A)| = 4$ なのは，$f(2) = f(5)$，$f(4) = f(9)$ というような**像の衝突**が起こっているからである．□

♦ **例 2.3**　$f : X \to Y$ を定数写像とする．つまり，全ての $x \in X$ に対する出力はある特定の元 $y \in Y$ である．このとき，任意の空でない $A (\subseteq X)$ について $f(A) = \{y\}$ である．□

♦ **例 2.4**　例 1.14 で見たように，実数列は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像である．a を実数列とするとき，その像 $a(\mathbb{N})$ は数列 a に現れる項の全体であるが，**これは写像としての数列 a そのものとは別物である**．実際，

a は写像であるが $a(\mathbb{N})$ は $\mathbb{R}$ の部分集合である．例えば，a が定数列 0 であるとき，像 $a(\mathbb{N})$ は単元集合 $\{0\}$ であるが，数列としての a は $0, 0, 0, \ldots$ のように 0 が無限に並んだ列である． □

♦ **例 2.5** 写像 $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 6x + 8y$ に対して像 $\operatorname{img} f$ を求めよう．任意の $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して，$f(x, y) = 6x + 8y = 2(3x + 4y) \in 2\mathbb{Z}$[*10]であるから，$\operatorname{img} f \subseteq 2\mathbb{Z}$ である．$\operatorname{img} f \supseteq 2\mathbb{Z}$ でもあることを示す．$z = 2n$ を任意の偶数とする．$3 \times (-1) + 4 \times 1 = 1$ の両辺を n 倍すると，$3(-n) + 4n = n$ となる．よって，$f(-n, n) = 6(-n) + 8n = 2(3(-n) + 4n) = 2n = z$ である．したがって，$z \in \operatorname{img} f$ である．ゆえに，$2\mathbb{Z} \subseteq \operatorname{img} f$ も成立する．以上から，$\operatorname{img} f = 2\mathbb{Z}$ である． □

命題 2.6. $f: X \to Y$ を写像，$A, A' \subseteq X$ とする．

(1) $A \subseteq A'$ ならば，$f(A) \subseteq f(A')$ である．
(2) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ である．
(3) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ である．

証明．ここでは (3) の証明のみを述べて，残りは各自の練習問題とする (→演習 2.2)．

$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ であることを示すには，$f(A \cap A')$ に属する任意の y について，それが $f(A)$ と $f(A')$ の両方に所属することを示せばよい．$y \in f(A \cap A')$ とする．像 $f(A \cap A')$ の定義から，ある $x \in A \cap A'$ を用いて $y = f(x)$ と書ける．$x \in A \cap A'$ なので，$x \in A$ でもある．そして $y = f(x)$ なので，像 $f(A)$ の定義から $y \in f(A)$ となる．同様にして，$x \in A'$ でもあることから，$y = f(x) \in f(A')$ となることが分かる． □

▶ **演習 2.1** 例 2.5 と同じ写像 f について，E を奇数の全体とするとき，$f(E \times E) = 2 + 4\mathbb{Z}$ であることを示せ．ここで，$2 + 4\mathbb{Z}$ は $2 + 4k$ (k は整数) という形式で書ける整数の全体である．

▶ **演習 2.2** 命題 2.6 の (1) と (2) をそれぞれ証明せよ．また，(3) において $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$ となる具体的事例を与えよ．

▶ **演習 2.3** 命題 2.6 の (2) は無限個の部分集合についても成立することを示せ．すなわち，$f: X \to Y$ を写像，$\{A_i\}_{i \in I}$ を X の部分集合 A_i らから成る族 (無限族であってもよい) とするとき，

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

であることを示せ．

▶ **演習 2.4** $f: X \to Y$ を写像，$A \subseteq X$ とするとき，$f(X \setminus A)$ と $Y \setminus f(A)$ の包含関係について次のうち確実に成り立つものはどれか? 確実に成り立つものについてはそれを証明し，そうでないものについては具体的な反例を挙げよ．

(1) $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$.
(2) $f(X \setminus A) \supseteq Y \setminus f(A)$.
(3) $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

[*10] $2\mathbb{Z}$ は偶数の全体を表している．一般に整数 n に対して $n\mathbb{Z}$ は n の倍数全体を表す．

2.2　逆像 (原像)

$f: X \to Y$ を写像, $B \subseteq Y$ とする．f で B の中へ写される X の元の全体

$$f^{-1}(B) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\} \tag{3}$$

を f による B の**逆像**または**原像**と呼ぶ．省略記法として, $f^{-1}(\{y\})$ を $f^{-1}(y)$ と書くこともある．(これは $f(x) = y$ となる $x \in X$ の全体である.) f^{-1} の肩にある -1 は「逆の」という意味を表しているだけであり,「-1 乗」や「$1/f$」という意味ではない．定義から, 任意の $x \in X$, $y \in Y$ について,

$$f(x) = y \iff x \in f^{-1}(y) \tag{4}$$

である.[*11] 逆像についても, B に対して $f^{-1}(B)$ を出力と考えることで, f は Y の冪集合 2^Y から X の冪集合 2^X への写像を与えていると考えることができる．

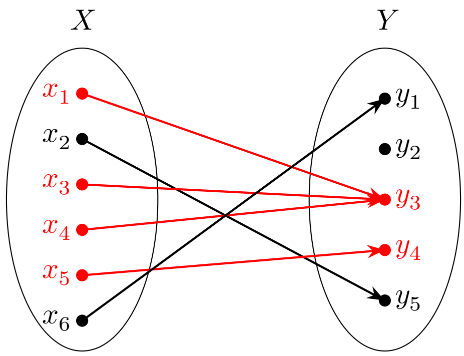


図 7　写像 $f: X \to Y$ による $B = \{y_3, y_4\}$ の逆像は $f^{-1}(B) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$.

♦ **例 2.7**　図 7 で,

- $B = \{y_3, y_4\}$ の逆像 $f^{-1}(B)$ は $\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ である．
- f の下で y_3 に写される元は x_1, x_3, x_4 なので, $f^{-1}(y_3) = \{x_1, x_3, x_4\}$ である．
- f の下で y_1 に写される元は x_6 だけなので, $f^{-1}(y_1) = \{x_6\}$ である．
- $y_2 \notin \operatorname{img} f$ なので, つまり $y_2 = f(x)$ となる $x \in X$ は存在しないので, $f^{-1}(y_2) = \emptyset$ である．　□

♦ **例 2.8**　例 1.3 の写像 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について, 逆像 $f^{-1}(2)$ は素数の全体と一致する．$f^{-1}(2)$ は $\mathbb{N}$ における単独の元, すなわち一つの自然数を表すのではなく, $\mathbb{N}$ の部分集合 (しかも, この場合は無限部分集合) を表している．　□

♦ **例 2.9**　f が定数写像ならば, ある特定の $y \in Y$ については $f^{-1}(y) = X$ であり, その y を含まない部分集合 $B \subseteq Y$ については $f^{-1}(B) = \emptyset$ である．　□

♦ **例 2.10**　例 1.18 で考えた写像 $f: X \to \mathbb{N}_0$ を考える．つまり, $f(x)$ は東京駅から x 駅への最安運賃である．B を (0 も含めて) 1000 以下の自然数の全体とすると, $f^{-1}(B)$ は東京駅から 1000 円以内の運賃で行くことができる駅の全体である．　□

[*11] 記号の使い方に注意．右辺は $x = f^{-1}(y)$ ではなくて $x \in f^{-1}(y)$ である．$f^{-1}(y)$ は $f^{-1}(\{y\})$ の略記であり, X の**部分集合**であることに注意しておこう．

♦ **例 2.11** (射影) X, Y を集合とする．$(x, y) \in X \times Y$ にその X-成分 x を対応させる写像 $p : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ を X-成分への**射影**と言う．Y-成分への射影も同様にして定義される．3 個以上の集合に渡る直積集合についても，それぞれの成分への射影が同様に定義される．X の部分集合 X_0 に対して，$p^{-1}(X_0)$ は X-成分が X_0 の元である組 (x, y) の全体だから，$p^{-1}(X_0) = X_0 \times Y$ である． □

♦ **例 2.12** どんな写像 f についても，$\operatorname{img} f$ の逆像 $f^{-1}(\operatorname{img} f)$ は始集合 $\operatorname{dom} f$ 全体である．これは，「任意の $x \in \operatorname{dom} f$ について $f(x) \in \operatorname{img} f$ である」という当たり前のことを言い換えたに過ぎない． □

▶ **演習 2.5** $f : X \to Y$ を写像，$B \subseteq Y$ とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap \operatorname{img} f)$ である．
(2) $f^{-1}(B) = \emptyset \iff B \cap \operatorname{img} f = \emptyset$ である．

命題 2.13. $f : X \to Y$ を写像，$B, B' \subseteq Y$ とする．

(1) $B \subseteq B'$ ならば，$f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$ である．
(2) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ である．
(3) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ である．

証明．(3) の証明の一部のみを述べて，残りは練習問題として残しておく (→演習 2.6)．

ここでは，$f^{-1}(B \cap B') \supseteq f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ であることのみを示す．これを示すためには，$f^{-1}(B)$ と $f^{-1}(B')$ の両方に属する任意の元 x が $f^{-1}(B \cap B')$ にも属することを示せばよい．$x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ とする．$x \in f^{-1}(B)$ であるから，逆像 $f^{-1}(B)$ の定義から $f(x) \in B$ である．同様にして，$x \in f^{-1}(B')$ でもあるから，$f(x) \in B'$ となる．したがって，$f(x)$ は B, B' の両方に属しているので，$f(x) \in B \cap B'$ となる．よって，逆像 $f^{-1}(B \cap B')$ の定義から $x \in f^{-1}(B \cap B')$ となる． □

▶ **演習 2.6** 命題 2.13 の (1) と (2) をそれぞれ示せ．また，(3) の証明を完成させよ．

▶ **演習 2.7** 命題 2.13 の (2), (3) は無限個の部分集合についてもそれぞれ同様に成立することを示せ．すなわち，$f : X \to Y$ を写像，$\{B_i\}_{i \in I}$ を Y の部分集合 B_i らから成る族 (無限族であってもよい) とするとき，

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

であることを示せ．

▶ **演習 2.8** $f : X \to Y$ を写像，$B \subseteq Y$ とする．$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ であることを示せ．

▶ **演習 2.9** $f : X \to Y$ を写像とする．

(1) A を X の部分集合とするとき，$f(A)$ は Y の部分集合だから，それの f による逆像 $f^{-1}(f(A))$ が定まる．これに対して，$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ が成り立つことを証明せよ．さらに，$f^{-1}(f(A)) \neq A$ となる具体的な事例を考えよ．

(2) B を Y の部分集合とするとき, $f^{-1}(B)$ は X の部分集合だから, それの f による像 $f(f^{-1}(B))$ が定まる．これに対して, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ であることを示せ．さらに, $f(f^{-1}(B)) \neq B$ となる具体的な事例を考えよ．

▶ **演習 2.10**　$f: X \to Y$ を写像とする．

(1) 任意の $A \subseteq X$ について $f^{-1}(f(A)) = A$ であることの証明を次のように書いた．この証明の間違いを指摘せよ．
(誤証明) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ は成り立つから, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ のみを示せば十分である．$x \in f^{-1}(f(A))$ とする．逆像 $f^{-1}(f(A))$ の定義から, $f(x) \in f(A)$ である．よって, 像 $f(A)$ の定義から $x \in A$ である．したがって, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ である．

(2) 任意の $B \subseteq Y$ に対して $f(f^{-1}(B)) = B$ であることの証明を次のように書いた．この証明の間違いを指摘せよ．
(誤証明) $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ は成り立つから, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ のみを示せば十分である．$y \in B$ として, $y = f(x)$ となる $x \in X$ を一つ選ぶ．$f(x) = y \in B$ だから, 逆像の定義から $x \in f^{-1}(B)$ である．よって, 像の定義から $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ である．ゆえに, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ である．

命題 2.14. $f: X \to Y$ を写像, A を X の部分集合とするとき, 次の条件は同値である．

(1) $f^{-1}(f(A)) = A$ である．
(2) Y のある部分集合 B に対して $A = f^{-1}(B)$ である．
(3) X の任意の部分集合 A' について, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ である．

これらの条件が満たされるとき, A は f について**飽和**していると言う．

証明．ここでも証明の一部のみを示しておき, 証明全体を完成させることは練習問題としておく (→演習 2.11)．

(1)⇒(2): $B = f(A)$ は Y の部分集合であり, (1) から $A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B)$ となる．

(2)⇒(3): 命題 2.6(3) から, $f(A\cap A') \subseteq f(A)\cap f(A')$ である．よって, 後は $f(A\cap A') \supseteq f(A)\cap f(A')$ であることを示せばよいが, その証明は練習問題にしておく．

(3)⇒(1): 演習 2.9(1) から, $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ である．よって, 後は $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ であることを示せばよいが, その証明も練習問題にしておく．□

命題 2.15. $f: X \to Y$ を写像, B を Y の部分集合とするとき, $f(f^{-1}(B)) = B$ であるためには, X のある部分集合 A について $B = f(A)$ となることが必要十分である．この条件が成り立つとき, B は f について**飽和**していると言う．

証明．必要性: $f(f^{-1}(B)) = B$ と仮定する．$A = f^{-1}(B)$ は X の部分集合であり, $B = f(f^{-1}(B)) = f(A)$ となる．

十分性: X のある部分集合 A について $B = f(A)$ であれば, $f(f^{-1}(B)) = B$ であることを示せばよい．演習 2.9(2) から $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ なので, $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ であることを示せば十分である．その証明は練習問題とする (→演習 2.11)．□

▶ **演習 2.11**　命題 2.14 および命題 2.15 について, 証明を完成させよ．

▶ **演習 2.12**　$f : X \to Y$ を写像とする．

(1) X の部分集合 A が f で飽和している $(f^{-1}(f(A)) = A$ である$)$ ためには，$f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ であることが必要十分であることを示せ．

(2) Y の部分集合 B が f で飽和している $(f(f^{-1}(B)) = B$ である$)$ ためには，$B \subseteq f(X)$ であることが必要十分であることを示せ．

▶ **演習 2.13**　$f : X \to Y$ を写像とする．

(1) $\{A_i\}_{i \in I}$ を f で飽和している部分集合 $A_i \subseteq X$ らから成る族とする．(無限個の集合から成る族でもよい.) このとき，$\bigcup_{i \in I} A_i$ と $\bigcap_{i \in I} A_i$ も f で飽和していることを示せ．

(2) $\{A_i\}_{i \in I}$ を f で飽和している部分集合 $B_i \subseteq X$ らから成る族とする．(無限個の集合から成る族でもよい.) このとき，$\bigcup_{i \in I} B_i$ と $\bigcap_{i \in I} B_i$ は f で飽和していることを示せ．

3　単射と全射

f が集合 X から集合 Y への写像であるという時には，どの $x \in X$ についても，それに対応する像 $f(x)$ が Y の中で唯一つに決まるということが要件であった．この際，異なる x を入力すれば異なる $f(x)$ が出てくるとか，あるいはどの $y \in Y$ も何らかの入力 $x \in X$ に対する変換結果として出力されるということは必ずしも要求されていない．本節で学ぶ「単射」および「全射」とは，この辺りの事情に一定の制限がかかった写像である．

3.1　単射

まずは単射から始めよう．

単射

定義 3.1. $f : X \to Y$ が**単射**であるとは，任意の $x, x' \in X$ について，次が成立することを言う:

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'). \tag{5}$$

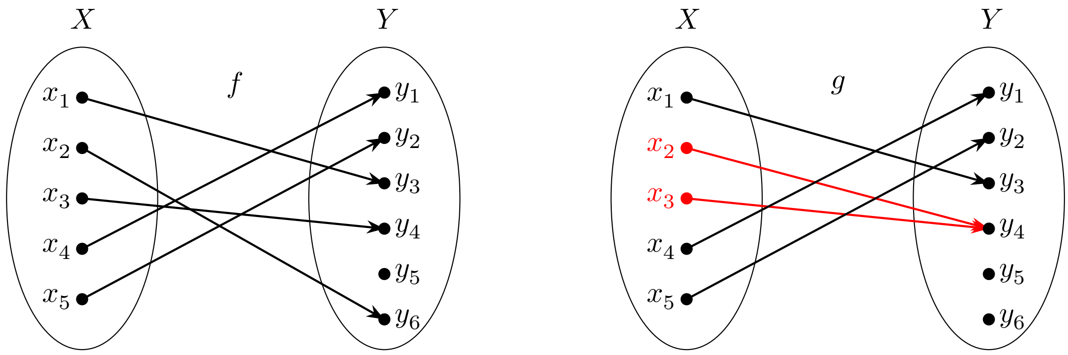


図 8　単射 f と単射ではない写像 g.

図 8 は単射 f と単射ではない写像 g の例を描いている．g の方では，$x_2 \neq x_3$ であるが $g(x_2) = g(x_3)$ であるという**像の衝突**が起こっているので，g は単射ではない．f ではこのような像の衝突が起こっておらず，X から出る矢印の行き先は全て異なっている．このような写像 f が単射である．像の衝突がないことは，任意の $y \in \operatorname{img} f$ について原像 $f^{-1}(y)$ が単独の元から成ることと同じである．

式 (5) の代わりに，その対偶

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \tag{6}$$

もよく使われる．$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ は (f が単価写像である限りは) 当たり前のことだが，式 (6) はこれの逆に当たる条件である．

♦ **例 3.2** 例 1.18 で考えた写像 $f : X \to \mathbb{N}_0$ を考える．つまり，$f(x)$ は東京駅から x 駅への最安運賃である．$f(\text{仙台}) = 6050$，$f(\text{刈谷}) = 6050$ なので，f は単射ではない．常識的に考えて，仙台駅と刈谷駅に限らず，東京駅からの最安運賃が同じである駅が複数存在することには何の不思議もない． □

♦ **例 3.3** 集合 X が集合 Y の部分集合であるとき，自然に包含写像 $f : X \to Y$ $(x \mapsto x)$ が定まるが (→ 例 1.9)，これは明らかに単射である．特に，恒等写像は単射である．なお，空写像 $\emptyset \to Y$ (Y は空集合で

☕ Coffee Break ☕

あなたは誰かと同じ誕生日?

X, Y をそれぞれ m 個，n 個の元から成る有限集合とするとき，X から Y への単射は全部で何個あるだろう？ まず，$m > n$ である限り単射 $X \to Y$ は存在し得ない．5 人いるのに部屋が 4 つしかないなら，どこかの部屋に 2 人以上がいっしょに入るしかないことと同じ理屈である．だから，以下では $m \leq n$ と仮定しておく．$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ と書いておこう．単射 $f : X \to Y$ を構成する際に，まず $f(x_1)$ の値を決定する．これは Y に属する値であれば何でもよいので，n 通りの候補がある．次に $f(x_2)$ は先ほど決めた $f(x_1)$ とは違う値から選ばれるので，候補は $n-1$ 通りある．次に $f(x_3)$ は $f(x_1)$, $f(x_2)$ とは違う値から選ばれるので，候補は $n-2$ 通りある．この議論を続けていけば，結局は単射 f の作り方には

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{7}$$

通りあることがわかる．これが単射 $X \to Y$ の総数であるが，これは高校数学でお馴染みの通り，n 個の元から選ばれる m-順列の総数である．

さて，演習 1.2(2) から，X から Y への写像は全部で n^m 個ある．その中で単射が $n!/(n-m)!$ 個あるから，X から Y への写像を一様ランダムに選んだとき，それが単射である確率は

$$p(m,n) = \frac{n!}{n^m(n-m)!}$$

である．例えば $n = 365$ とすると，$m \geq 23$ であれば $p(m,n)$ は $1/2$ を下回る．これは，「ある教室に生徒が 23 人以上いれば，その中に誕生日が同じである 2 人が存在する確率は $1/2$ を超える」ことを意味する．誕生日は閏年を無視すれば 365 通りもあるのに，たった 23 人集まっただけで同じ誕生日の 2 人が存在する確率は $1/2$ を超えてしまう．ちなみに，$m = 80$ 人程度集まれば，その中で誕生日が同じである 2 人がいる確率はほとんど 1 である．この事実は直観に反するという意味で**誕生日のパラドックス**と呼ばれているが，論理的矛盾ではなく，正当な事実である．

あってもなくてもよい) も論理的には空虚に単射であると考えられる．単射の定義条件は

$$x, x' \in X \wedge x \neq x' \to f(x) \neq f(x')$$

であるが, $X = \emptyset$ であるときには仮定 $x, x' \in X \wedge x \neq x'$ が偽なので, この条件命題全体としては空虚に真となるからである． □

♦ **例 3.4** 写像 $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ を $g(x, y) = (7x - 2y, 3x + 5y - 1)$ で定義する．$(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$, $g(x, y) = g(x', y')$ と仮定すると, 次の式が成立する:

$$(7x - 2y, 3x + 5y - 1) = g(x, y) = g(x', y') = (7x' - 2y', 3x' + 5y' - 1).$$

この両辺で両成分を比較すれば, $7(x - x') = 2(y - y')$, $3(x - x') = -5(y - y')$ が得られる．よって, $35(x - x') = 10(y - y') = -6(x - x')$ であり, $x = x'$ が出る．そして, $2(y - y') = 7(x - x') = 0$ だから, $y = y'$ でもある．ゆえに, $(x, y) = (x', y')$ である．以上から, g は単射である． □

♦ **例 3.5** 関数 $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ を $h(x) = x/(1 + x)^2$ で定める．ここで, $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ である．$x, y \in [1, \infty)$, $h(x) = h(y)$ とすると,

$$0 = h(x) - h(y) = \frac{x}{(1 + x)^2} - \frac{y}{(1 + y)^2} = \frac{(x - y)(1 - xy)}{(1 + x)^2(1 + y)^2}$$

なので, $x = y$ または $xy = 1$ のいずれかである．$x, y \in [1, \infty)$, つまり $x, y \geq 1$ なので, $xy = 1$ であるのは $x = y = 1$ であるときだけである．ゆえに, いずれにせよ $x = y$ である．よって, h は単射である．

この例では, h の始集合を $[1, \infty)$ から広げると単射ではなくなる．例えば, 始集合が $(0, \infty)$ であるとすると, $h(2) = 2/9 = h(1/2)$ となる．このように, **写像が単射か否かを論じるにはその始集合を明確にしておくことが肝要である**． □

単射は次の命題の通り像と逆像を用いて特徴づけることもできる．

命題 3.6. 任意の写像 $f : X \to Y$ について, 次の条件は全て同値である．

(1) f は単射である．
(2) X の任意の部分集合 A, A' に対して, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ が成り立つ．
(3) X の任意の部分集合 A に対して, $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ．
(4) X の任意の部分集合 A, A' に対して, $f(A) \subseteq f(A') \Rightarrow A \subseteq A'$ が成り立つ．

証明. (1)⇒(2): 命題 2.6(3) から $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ は必ず成り立つので, $f(A \cap A') \supseteq f(A) \cap f(A')$ が成り立つことを示しておけばよい．$y \in f(A) \cap f(A')$ とする．$y \in f(A)$ なので, ある $a \in A$ を用いて $y = f(a)$ と書ける．同様に, $y \in f(A')$ なので, ある $a' \in A$ を用いて $y = f(a')$ と書ける．$f(a) = y = f(a')$ であるが, f は単射なので, $a = a'$ である．$a \in A$ かつ $a = a' \in A'$ なので, $a \in A \cap A'$ であり, したがって $y = f(a) \in f(A \cap A')$ である．よって, $f(A \cap A') \supseteq f(A) \cap f(A')$ が成り立つ．

(2)⇒(3): これは命題 2.14 から明らかである．

(3)⇒(4): $A, A' \subseteq X$, $f(A) \subseteq f(A')$ であるとする．原像の単調性 (→命題 2.13(1)) から, $f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(f(A'))$ であるが, 仮定から $f^{-1}(f(A)) = A$, $f^{-1}(f(A')) = A'$ なので, $A \subseteq A'$ でもある．

(4)⇒(1): $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ と仮定する．$A = \{x\}$, $A' = \{x'\}$ とおくと，$f(A) = \{f(x)\} = \{f(x')\} = f(A')$ なので，仮定から $A \subseteq A'$ かつ $A \supseteq A'$，すなわち $A = A'$ が成り立つが，これは $x' = x$ であることを意味する．ゆえに，f は単射である．□

▶ **演習 3.1**　次の写像 $f : X \to Y$ がそれぞれ単射であるか否かを論ぜよ．

(1) X は $\mathbb{Z}$ の有限部分集合の全体, Y は 0 以上の整数の全体, $f(A) = |A|$.

(2) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $Y = \mathbb{Q}$, $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$. ただし, $\mathbb{Z}^*$ は 0 以外の整数の全体を表す.

(3) $X = Y = \mathbb{R}_0^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$. ただし, $\mathbb{R}_0$ は 0 以上の実数の全体を表す.

(4) $X = Y = [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ が有理数のとき}) \\ 1 - x & (x \text{ が無理数のとき}). \end{cases}$

(5) $X = Y = 2^{\mathbb{Z}} \times 2^{\mathbb{Z}}$, $f(A, B) = (A \cap B, A \cup B)$.

3.2　全射

全射

定義 3.7. 写像 $f : X \to Y$ が**全射**であるとは，$Y = f(X)$，すなわち $\operatorname{codom} f = \operatorname{img} f$ であることを言う．

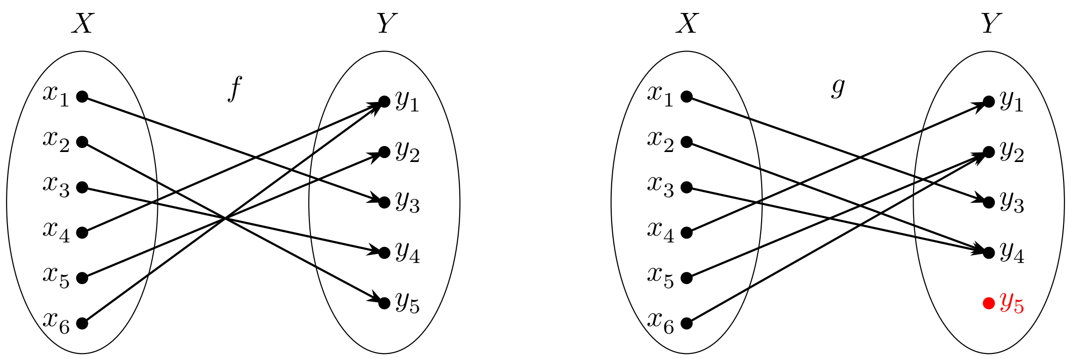


図 9　全射 f と全射ではない写像 g.

図 9 は全射 f と全射ではない写像 g の例を描いている．g では終集合 Y の中に $\operatorname{img} g$ に属さない**余剰な元** y_5 があるから，g は全射ではない．f では終集合 Y の元にはもれなく X から矢印が最低 1 本は伸びており，余剰な元は無いので，$Y = \operatorname{img} f$ である．このような写像 f が全射である．f が X から Y への全射であることを，f は Y の**上への写像**であるなどと言うこともある．

全射の定義条件は $\operatorname{codom} f = \operatorname{img} f$ であるが，$\operatorname{img} f \subseteq \operatorname{codom} f$ は当たり前のことだから，大切なのは $\operatorname{img} f \supseteq \operatorname{codom} f$ という包含である．この条件は次のように書き直される:

任意の $y \in \operatorname{codom} f$ に応じて，$y = f(x)$ を満たす元 $x \in \operatorname{dom} f$ が**存在する**．

ここで，x **は** y **に応じて変わってもよいし,** y **に対して唯一つである必要もない**．図 9 の f では，y_4 に対応する x が x_2, x_4 の 2 個ある．写像 $f : X \to Y$ が全射であることは，「任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である」ことと表現することもできる．

♦ **例 3.8** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ とおく．f は $\mathbb{R}$ への写像としては全射ではない．$\mathrm{img}\, f$ は非負実数の全体 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ であり，これは終集合 $\mathbb{R}$ よりも真に狭いからである．一方で，f を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像と考えれば全射である．このように，**全射性を論じるには終集合を明確にしておくことが重要である**． □

♦ **例 3.9** 例 1.3 の写像 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を考えよう．終集合 $\mathbb{N}$ の任意の元 y について，$x=2^{y-1}\in\mathbb{N}$ の約数は $2^0, 2^1, \dots, 2^{y-1}$ で合計 y 個だから，$f(x)=y$ である．ゆえに，f は全射である． □

♦ **例 3.10** a, b を実数とし，2 次関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$ を考える．任意の $x\in\mathbb{R}$ なので，

$$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\geq b-\frac{a^2}{4}$$

である．ゆえに，$y<b-a^2/4$ となる任意の実数 y について $y\notin \mathrm{img}\, f$ である．したがって，f は全射ではない．ちなみに，$x=a/2-1$ と $x'=a/2+1$ に対して，$x\neq x'$ であるが，$f(x)=f(x')=b+1-a^2/4$ なので，f は単射でもない． □

♦ **例 3.11** 写像 $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ を $(x,y)\mapsto 2x+3y^2$ で定める．z を終集合 $\mathbb{Z}$ から任意に選ぶ．z が偶数ならば，$x=z/2$ とおくと，$(x,0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ かつ $f(x,0)=2x=z$ である．z が奇数ならば，$x=(z-3)/2$ とおくと，$(z,1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ かつ $f(x,1)=2x+3=z$ である．よって，いずれにせよ $z\in\mathrm{img}\, f$ である．ゆえに，f は全射である． □

▶ **演習 3.2** $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ 自身への写像で，(1) 単射であるが全射ではないもの，(2) 全射であるが単射ではないものをそれぞれ具体的に挙げよ．

▶ **演習 3.3** 次の各々の写像 $f:X\to Y$ について，それが全射であるか否かを論ぜよ．

(1) $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$. ここで，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数の全体である．
(2) $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2, 2x_1-3x_2, 3x_1+2x_2-1)$.
(3) $X=M_n(\mathbb{R})$ (実数成分の n 次正方行列の全体), $Y=\mathbb{R}$, $f(A)=\det A$. ここで，$\det$ は行列式を表す．
(4) X は $\mathbb{Z}$ の有限部分集合の全体，Y は 0 以上の整数の全体，$f(A)=|A|$.
(5) $X=Y=2^{\mathbb{Z}}\times 2^{\mathbb{Z}}$, $f(A,B)=(A\cap B, A\cup B)$.

▶ **演習 3.4** X を集合，K を X の部分集合，$f:X\to K$ を写像とするとき，次の 2 条件は同値であることを示せ．

(1) 全ての $x\in K$ について $f(x)=x$ である．
(2) f は全射であり，かつ全ての $x\in X$ について $f(f(x))=f(x)$ である．

▶ **演習 3.5** 任意の写像 $f:X\to Y$ に対して次の条件は全て同値であることを証明せよ．

(1) f は全射である．
(2) Y の全ての部分集合は f の下で飽和している．すなわち，Y のすべての部分集合 B について，$f(f^{-1}(B))=B$ である．
(3) 任意の $B, B'\subseteq Y$ に対して，

$$f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(B')\Rightarrow B\subseteq B'$$

である．

3.3 全単射

全単射

定義 3.12. 写像 f が単射かつ全射であるとき, f は**全単射**であると言う.

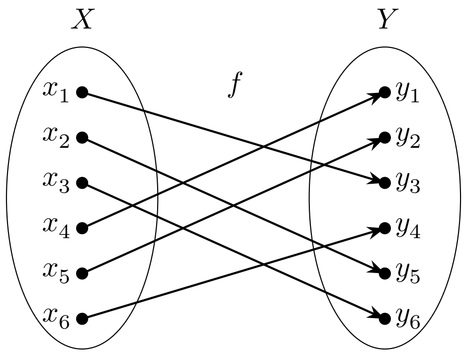


図 10　全単射 $X \to Y$ の例.

全単射は図 10 のように像の衝突もなく, 終集合にも余剰な元がないという完全なる 1 対 1 の対応である. X から X 自身への全単射は X の元を並べ替える操作に相当するので, X 上の**置換**とも呼ばれる.

♦ **例 3.13**　$X = \{1, 2, 3\}$ 上の置換は全部で次の 6 個ある:

$$
\begin{aligned}
&f_1 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3. && f_4 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1.\\
&f_2 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 2. && f_5 : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2.\\
&f_3 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3. && f_6 : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1.
\end{aligned}
$$

f_1 は恒等写像である. □

上の例 3.13 を見ればわかるが, 有限集合 X 上の置換は X 上の元から成る**順列**と実質的には同じものであると考えられる. 集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上の n-順列 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ が X 上の置換 $f(x_k) = x_{i_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ のことを表していると思えばよい. 一般に $|X| = n$ のとき, X 上の置換は全部で $n!$ 個ある.

♦ **例 3.14**　a, b を実数 $(a \neq 0)$ として, 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ を考える. $x, x' \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x')$ とすると, $ax + b = ax' + b$ なので $ax = ax'$ であるが, 仮定から $a \neq 0$ であり, 両辺を a で割ると $x = x'$ となる. したがって, f は単射である. 任意の $y \in \mathbb{R}$ に応じて, $x = (y - b)/a$ とおくと, $f(x) = ax + b = y$ となるので, f は全射でもある. よって, f は全単射である. □

♦ **例 3.15**　$\mathbb{Z}_{15} = \{0, 1, 2, \dots, 14\}$ とおく. この中には 15 個の整数があるが, これらの中で 15 と互いに素であるものの全体を $\mathbb{Z}_{15}^*$ で表す. 具体的に書くと,

$$\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

である. 任意の $x \in \mathbb{Z}_{15}^*$ に対して, $x^3 \bmod 15$ (x^3 を 15 で割ったときの余り) もまた $\mathbb{Z}_{15}^*$ に属している. (例えば, $x = 7$ に対して, $7^3 \bmod 15 = 13 \in \mathbb{Z}_{15}^*$ である. 他の $x \in \mathbb{Z}_{15}^*$ に対しても同様にして確かめられるので, 地道に手計算をするか, 計算機などを使って確かめよう.) したがって, 写像

$$f : \mathbb{Z}_{15}^* \to \mathbb{Z}_{15}^*, \quad x \mapsto x^3 \bmod 15$$

が生じる．f は全単射であるが, それは計算機などを用いて地道に各々の $x \in \mathbb{Z}_{15}^*$ に対する $f(x)$ の値を計算して表を作れば確かめることができる．この手の写像が全単射であることの裏には整数論的な仕掛けがあるのだが, このことは最も プレーンな形の RSA 暗号方式の原理として働いている．(第 3 巻『同値関係』第 3 節を参照.) □

♦ **例 3.16** $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ として, 任意の $x \in X$ に対して $f(x) = 3^x \bmod 7$ とおく．(これは 3^x を 7 で割ったときの余りを表す.) この f は X から X 自身への写像になっている．実際に f を書き下せば,

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 6, \quad f(4) = 4, \quad f(5) = 5, \quad f(6) = 1$$

となる．このように, f は X 上の置換になっている．f と同様にして, $g(x) = 2^x \bmod 7$ を考えてみると,

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 4, \quad g(3) = 1, \quad g(4) = 2, \quad g(5) = 4, \quad g(6) = 1$$

となる．この g は X から X 自身への写像ではあるが, 単射でも全射でもない． □

♦ **例 3.17** $A = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ と $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ に対して, 次の写像は全単射であることを示そう．

$$f : A \times B \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto 2^a b.$$

単射性について．$(a, b), (a', b') \in A \times B$, $f(a, b) = f(a', b')$ と仮定する．すると, $2^a b = 2^{a'} b'$ である．一般性を失わず $a \geq a'$ であると仮定して, 両辺を $2^{a'}$ で割ると, $2^{a-a'} b = b'$ となる．ここで右辺は奇数なので, 左辺も奇数である．よって, $a - a' = 0$, すなわち $a = a'$ である．($a - a' \geq 1$ ならば, $2^{a-a'} b$ は偶数である.) したがって, $b = b'$ でもあることも出る．ゆえに, $(a, b) = (a', b')$ である．以上から, f は単射である．

全射性について．$n \in \mathbb{N}$ とする．$2^a | n$ (2^a は n の約数) となる最大の指数 $a \in A$ を考えると, $n = 2^a b$ ($b \in B$) と分解される．この $(a, b) \in A \times B$ に対して $f(a, b) = 2^a b = n$ となる．よって, f は全射である．

以上から, f は全射である．上の議論から明らかであろうが, f が全単射であるのは, 任意の自然数 n が 2 の冪と奇数との積に一意的に分解できることによる． □

命題 3.18. X, Y を**同じ大きさの有限集合**とするとき, 任意の写像 $f : X \to Y$ について, 次の 3 条件は全て同値である:

(1) f は単射である．
(2) f は全射である．
(3) f は全単射である．

証明. 以下, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ $(n = |X| = |Y|)$ とする．

(1)⇒(3): f が単射であるとする．$\operatorname{img} f = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ は Y の部分集合である．f は単射なので, $f(x_1), \dots, f(x_n)$ は全て相異なっている．よって, $|\operatorname{img} f| = n$ である．Y は大きさが n の有限集合であり, $\operatorname{img} f$ はその部分集合で大きさが n であるものなので, $Y = \operatorname{img} f$ である.[*12] つまり, f は全射でもある．よって, f は全単射である．

(2)⇒(3): $f(x_i) = f(x_j)$ $(i \neq j)$ と仮定すると, $\operatorname{img} f = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ の大きさは $n - 1$ 以下となるので, $\operatorname{img} f$ は Y の真部分集合である．しかし, f は全射だからそれはあり得ない．ゆえに, $i \neq j$ ならば必ず $f(x_i) \neq f(x_j)$ である．つまり, f は単射でもある．したがって, f は全単射である．

[*12] 言うまでもないかも知れないが, 大きさが n の有限集合 Y において, n 個の元から成る部分集合は Y 自身しかない．

(3)⇒(1) および (3)⇒(2) は明らかである. □

この命題はイメージを掴みやすいのはよいが, 無限集合に対しては一般に成立しない. 例えば, 演習 3.2 では $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像で, 単射であるが全射ではないもの, 全射であるが単射ではないものがそれぞれ構成されている. また, X と Y が有限集合であっても, $|X| \neq |Y|$ である場合には, 命題 3.18 は通用しない. (ここで, 集合の絶対値記号は集合が持つ元の個数を表している.)

本節で解説した単射, 全射, 全単射の定義に従うと, 任意の集合 X, Y に対して,

- $|X| \leq |Y| \iff X$ から Y への**単射**が存在する
- $|X| \leq |Y| \iff Y$ から X への**全射**が存在する
- $|X| = |Y| \iff X$ と Y を結ぶ**全単射**が存在する

というイメージが浮かんで来ないだろうか? 実際, 集合の大きさ (元の個数) の大小比較はこのイメージに基づいて定義されるが, それは第 5 巻『集合の濃度と順序数』の話題である.

▶ **演習 3.6**　次の各々の写像 $f : X \to Y$ について, それが全単射であることを示せ.

(1) $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} 2n & (n > 0 \text{ のとき}) \\ 1 - 2n & (n \leq 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(2) $X = Y = [0, 1],\ f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ が有理数のとき}) \\ 1 - x & (x \text{ が無理数のとき}). \end{cases}$

(3) $X = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\},\ Y = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$,

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & (x \in S \text{ のとき}) \\ x & (x \notin S \text{ のとき}). \end{cases}$$

ただし, $S = \{1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, \dots\}$ とする.

4　合成写像と逆写像

4.1　写像の合成

f と g を写像とし, $\operatorname{img} f \subseteq \operatorname{dom} g$ であるとする. この仮定から, 任意の $x \in \operatorname{dom} f$ に対して, 像 $f(x)$ は $\operatorname{dom} g$ に属しているので, 続けてそれを g で変換すれば $\operatorname{codom} g$ の元 $g(f(x))$ が得られる. この一連の流れから, $x \in \operatorname{dom} f$ に対して $g(f(x)) \in \operatorname{codom} g$ を対応させる写像が構成される. これを

$$g \circ f : \operatorname{dom} f \to \operatorname{codom} g, \quad x \mapsto g(f(x))$$

と書いて, g を f に**合成した写像**と呼ぶ. $\operatorname{img} f \subseteq \operatorname{dom} g$ であるとき, **合成** $g \circ f$ **が定義可能**であると言う.

この定義通り, 合成写像 $g \circ f$ を動かすときには, まず f に対する入力 x が与えられ, それが $f(x)$ に変換され, それが続けて g に入力されて最終的に出力 $g(f(x))$ が得られるという流れである. つまり, 下の図のように f が先に動いてその後に g が動くイメージである.

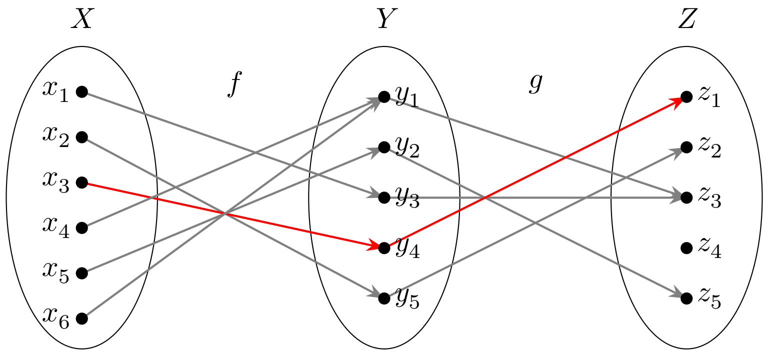
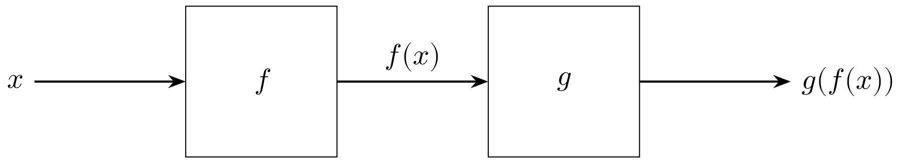


図 11　合成写像 $g \circ f$ のイメージ．赤矢印は $g \circ f(x_3) = g(y_4) = z_1$ となる様子を示している．



この動作では，$f(x)$ を g に入力できる必要があるので，$f(x) \in \operatorname{dom} g$ でなければならない． これが $\operatorname{img} f \subseteq \operatorname{dom} g$ という仮定が置かれている理由である．

ここでは，写像 f の入力 x に対する像を $f(x)$ と記述しているが，それに対して xf のように f を x の右側に書く記法が使われることもある (→補足 1.1)．この記法を使うときには，ここで言う合成写像 $g \circ f$ のことを順番を逆にして $f \circ g$ と書いて，$x(f \circ g) = (xf)g$ と書く方が合理的である．つまり，x に対して先に作用する写像の方を x の近くに書くわけである．

♦ **例 4.1**　写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ をそれぞれ次式で定義する:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

ここで，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数全体である．$f(3) = -4$ は $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}_{\geq 0}$ に属さず，$g \circ f(3) = g(-4)$ の値は定まらない．ゆえに合成 $g \circ f$ は定義可能ではない．一方で合成 $f \circ g$ は定義可能であり，$x \in \operatorname{dom} g = \mathbb{R}_{\geq 0}$ のとき，$f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = x - 6\sqrt{x} + 5$ である．このように，**合成 $f \circ g$ が定義可能でも，逆順の合成 $g \circ f$ が定義可能であるとは限らない**．□

♦ **例 4.2**　写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を各々 $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 2x + 1$ と定めるとき，合成 $g \circ f$ と $f \circ g$ は両方とも $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像として定義可能である．しかし，

$$g \circ f(x) = g(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2) + 1 = 2x^2 + 5,$$
$$f \circ g(x) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 3$$

だから $g \circ f \neq fg$ である．(例えば，$g \circ f(0) = 5$ であるが $f \circ g(0) = 3$ である.) このように，**合成 $f \circ g$, $g \circ f$ が共に定義可能であっても，両者が一致するとは限らない**．□

♦ **例 4.3**　$f : X \to Y$ を写像，A を X の部分集合とする．f に包含写像 $e : A \to X$ (例 1.9) を右から合成した写像 $f \circ e : A \to Y$ は単に f の始集合を A に制限した写像である．同じく，Y がある別の集合 Z の部分集合であり，$e : Y \to Z$ が包含写像であるとき，合成 $e \circ f : X \to Z$ は f の終集合を Z に広げた写像である．□

合成の結合法則

命題 4.4. f, g, h を写像とし，合成写像 $h \circ g$ と $g \circ f$ が共に定義可能であると仮定する．このとき，$(h \circ g) \circ f$ と $h \circ (g \circ f)$ は共に定義可能であり，かつ両者は $\mathrm{dom}\, f$ から $\mathrm{codom}\, h$ への写像として互いに一致する．

証明. $h \circ g$ と $g \circ f$ が共に定義可能だから，$\mathrm{dom}\, h \supseteq \mathrm{img}\, g$ かつ $\mathrm{dom}\, g \supseteq \mathrm{img}\, f$ である．ゆえに，

$$\mathrm{dom}(h \circ g) = \mathrm{dom}\, g \supseteq \mathrm{img}\, f, \quad \mathrm{img}(g \circ f) \subseteq \mathrm{img}\, g \subseteq \mathrm{dom}\, h$$

であり，したがって $(h \circ g) \circ f$ と $h \circ (g \circ f)$ は共に定義可能である．さらに，任意の $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対して

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \\ h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

だから，$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ である．つまり，この両者はどちらも f, g, h をこの順番で動かして作られる写像である (→図 12)． □

$$x \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{f(x)} \boxed{g} \xrightarrow{g(f(x))} \boxed{h} \longrightarrow h(g(f(x)))$$

図 12　命題 4.4 のイメージ．

この通り，写像の合成規則については結合性が成り立つので，$h \circ g \circ f$ などと括弧をつけずに書いたとしても，それが $(h \circ g) \circ f$ なのか $h \circ (g \circ f)$ なのかをいちいち気にする必要はない．

命題 4.5. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．

(1) f と g が共に単射ならば，$g \circ f$ も単射である．
(2) f と g が共に全射ならば，$g \circ f$ も全射である．

特に，f と g が共に全単射ならば，$g \circ f$ も全単射である．

証明. ここでは，(1) の証明のみを述べる．(2) の証明は演習問題とする (→演習 4.1)．

$g \circ f$ が単射であることを示すには，任意の $x, x' \in X$ について，$g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ であることを示せばよい．$g \circ f(x) = g \circ f(x')$ とする．仮定から g は単射なので，$f(x) = f(x')$ である．そして f も単射であるから，$x = x'$ となる． □

上の命題のように，写像に関する何らかの性質が合成操作で保存されるかどうかは数学の中でよく問題にされることである．これはつまり，写像 f, g がある性質 P を持っているとき，合成写像 $g \circ f$ も性質 P を持っているかどうかという問題である．上の命題では，「単射である」「全射である」「全単射である」という性質は全て合成操作で保存されることが主張されている．

▶ **演習 4.1**　命題 4.5(2) を証明せよ．

▶ **演習 4.2**　$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とするとき，次のことを証明せよ．

(1) 任意の $A \subseteq X$ について, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ である．ここで, 左辺は合成 $g \circ f$ による A の像であり, 右辺は g による $f(A)$ の像である．
(2) 任意の $C \subseteq Z$ について, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ である．ここで, 左辺は合成 $g \circ f$ による C の原像であり, 右辺は f による原像 $g^{-1}(C)$ の原像である．

▶ **演習 4.3**　$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．

(1) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射であることを示せ．
(2) $g \circ f$ が単射であるが, g は単射でないような事例を作れ．

▶ **演習 4.4**　$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．

(1) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射であることを示せ．
(2) $g \circ f$ は全射であるが, f は全射でないような事例を作れ．

▶ **演習 4.5**　$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．

(1) f は単射であるが, $g \circ f$ が単射でない具体的な事例を挙げよ．
(2) g は全射であるが, $g \circ f$ が全射でない具体的な事例を挙げよ．

単射および全射を写像の合成を用いて特徴づけることもできる．

命題 4.6. $f : X \to Y$ を写像とする．

(1) f が単射であるためには, X を終集合とする任意の写像 $u, v : Z \to X$ について,

$$f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v$$

であることが必要十分である．

(2) f が全射であるためには, Y を始集合とする任意の写像 $u, v : Y \to Z$ について,

$$u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v$$

であることが必要十分である．

証明. (1) f が単射であると仮定して, $u, v : Z \to X$, $f \circ u = f \circ v$ ならば $u = v$ であることを示す．任意の $z \in Z$ について $f(u(z)) = f \circ u(z) = f \circ v(z) = f(v(z))$ であるが, f は単射なので $u(z) = v(z)$ であり, したがって $u = v$ である．

十分性: $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ とする．$Z = \{z\}$ を任意の単元集合として, $u, v : Z \to X$ をそれぞれ $u(z) = x$, $v(z) = x'$ と定める．$f \circ u(z) = f(u(z)) = f(x) = f(x') = f(v(z)) = f \circ v(z)$ であるから, $f \circ u = f \circ v$ であり, したがって仮定から $u = v$ である．ゆえに, $x = u(z) = v(z) = x'$ である．よって, f は単射である．

(2) の証明は演習問題とする (→演習 4.6)．　□

▶ **演習 4.6**　命題 4.6(2) を証明せよ．

X, Y, Z を集合, $f : X \to Y$ を写像とする．任意の写像 $u : Z \to X$ を合成写像 $f \circ u : Z \to Y$ に変換ことで, 写像 $f^Z : X^Z \to Y^Z$ が生じる．ここで, X^Z は Z から X への写像の全体集合であり, Y^Z について

も同様である (→例 1.19). f^Z の様子は下の図式で表される.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "f^Z(u)=f\circ u"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

命題 4.6(1) は, f が単射であるためには, 任意の集合 Z について写像 f^Z が単射であることが必要十分であることを意味する. 一方, 写像 $u : Y \to Z$ を合成写像 $u \circ f : X \to Z$ に変換すれば写像 $f_Z : Z^Y \to Z^X$ が定まる:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_Z(u)=u\circ f"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ & Z. \end{tikzcd}$$

命題 4.6(2) は, f が全射であるためには, 任意の集合 Z について写像 f_Z が**単射**であることが必要十分であることを示している.

ここに出てきた写像 f^Z と f_Z は写像を写像に変換する写像なのでちょっとややこしい. 落ち着いて読み解いていけばいいが, 頭が混乱しそうな場合は, 上のように**図を描いて状況を整理してみる**ことが有効である. 写像がいくつも登場する場面では, それらの関係を図式で描いてみると頭の中を整理しやすくなる. 一般に, 集合と写像から成る図式で, 合成の経路によらず最終的に出来上がる合成写像が全て同じであるものは**可換図式**と呼ばれる. 例えば, 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

が可換であるとは, $g \circ \alpha = \beta \circ f$ が成り立つという意味である.「$f : A \to B$, $g : C \to D$, $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to D$ は写像であり, $g \circ \alpha = \beta \circ f$ が成り立つ」などというよりも, 上の図式を描いて「それが可換である」と言う方がはるかに理解しやすい.

4.2　左逆写像と右逆写像

例 1.8 で述べたように, 任意の集合 X について, 写像

$$\epsilon_X : X \to X, \quad x \mapsto x$$

を X 上の恒等写像と呼ぶ. この定義から, 任意の写像 $f : X \to Y$ に対して

$$\epsilon_Y \circ f = f, \quad f \circ \epsilon_X = f$$

が成り立つ.

左逆写像と右逆写像

定義 4.7. $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を写像とする. $g \circ f = \epsilon_X$ であるとき, f から見て g は**左逆写像**であると言い, g から見て f は**右逆写像**であると言う.

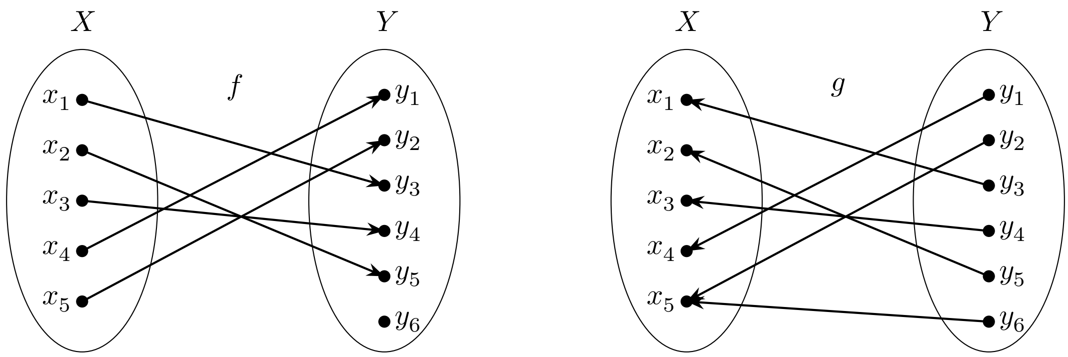


図 13　写像 f とその左逆写像 g の例.

f が g の左逆写像であるとは, f が g の左側から作用する (つまり, g の後から動作する) ことで, g の動作がキャンセルされるということである. f から見れば, g が右側から作用する (つまり, f に先立って g が動作する) ことで f の動作がキャンセルされるように見える.

図 13 は写像 f とその左逆写像 g の例である. この図を見れば概ね察しがつくと思うが, g は f の矢印の向きを逆転させて作られている. ただし, y_6 は像 $\operatorname{img} f$ に属していないので, y_6 での値 $g(y_6)$ は X の元であれば何でも構わない. 図では $g(y_6) = x_5$ となっているが, $g(y_6) = x_4$ や $g(y_6) = x_2$ などに変更しても, $g \circ f = \epsilon_X$ であることに変わりはない. このように, f が左逆写像を持つとき, それらは複数存在し得る.

図 13 で f の左逆写像 g を作る際に f の矢印の向きを逆転させているが, それは f が単射だからうまくできることである. f が単射でない場合には, $f(x) = f(x')$ を満たす相異なる元 $x, x' \in X$ が存在するが, f の矢印を逆転させるとき, $f(x) = f(x')$ から x, x' のそれぞれに向けて矢印が出ることになるので, 右逆写像 g が多価写像になってしまう. 実は, 次の定理に示す通り, f に左逆写像が存在するのは f が単射であるときだけである.

単射・全射と左逆写像・右逆写像

定理 4.8. $f : X \to Y$ を写像とするとき, 次の同値がそれぞれ成立する.

(1) f が単射 $\iff$ f の左逆写像が存在する.
(2) f が全射 $\iff$ f の右逆写像が存在する.

証明. (1) f が単射であると仮定して, その左逆写像が存在することを示す. f は単射だから, 任意の元 $y \in \operatorname{img} f$ に応じて, $y = f(x)$ となる $x \in X$ が唯一つ存在するが, それを $x = x_y$ と書く. ($x = x_y$ の存在は $y \in \operatorname{img} f$ であることから分かり, その一意性は f が単射であることからわかる.) あらかじめ X の元 $\tilde{x}$ を任意に選んでおき, それを用いて写像 $\tilde{f} : Y \to X$ を次の規則で定義する.

$$\tilde{f}(y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x_y & (y \in \operatorname{img} f \text{ のとき}) \\ \tilde{x} & (y \notin \operatorname{img} f \text{ のとき}). \end{cases}$$

$x \in X$, $y = f(x)$ とおくと, $y \in \operatorname{img} f$, $x = x_y$ だから, $\tilde{f}(f(x)) = \tilde{f}(y) = x_y = x = \epsilon_X(x)$ である. 以上から $\tilde{f} \circ f = \epsilon_X$ であり, $\tilde{f}$ は f の左逆写像である.

次に, f の左逆写像 $\tilde{f} : Y \to X$ が存在すると仮定して, f が単射であることを示す. $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ とすると, $x = \epsilon_X = \tilde{f}(f(x)) = \tilde{f}(f(x')) = \epsilon_X(x') = x'$ である. ゆえに, f は単射である.

(2) f が全射であると仮定して, その右逆写像が存在することを示す. f は全射だから, 任意の $y \in Y$ に応じて, $y = f(x)$ となる $x \in X$ が 1 つ以上存在する. このような x を y に応じて任意に一つずつ選んでおき, それを x_y と書く. 写像 $\tilde{f} : Y \to X$ を $y \mapsto x_y$ で定める (図 14). 任意の $y \in Y$ について $f(x_y) = y$ なので, $f(\tilde{f}(y)) = f(x_y) = y$ である. したがって, $f \circ \tilde{f} = \epsilon_Y$ である. 以上から, $\tilde{f}$ は f の右逆写像である.

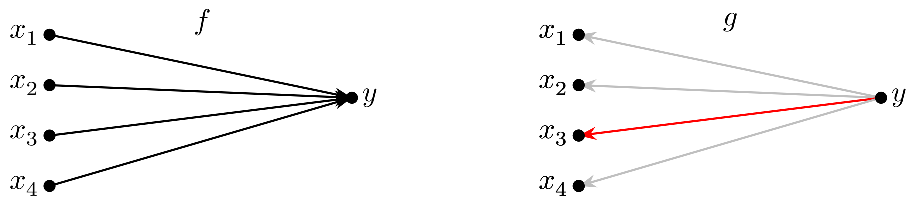


図 14 定理 4.8(2): f の右逆写像 $\tilde{f}$ の構成. $f(x) = y$ を満たす x の中から一つを選んで $g(y) = x$ とおく.

次に, f が右逆写像 $\tilde{f} : Y \to X$ を持っているとき, f は全射であることを示す. 任意の $y \in Y$ について, $x = \tilde{f}(y) \in X$ とおくと, $f(x) = f\tilde{f}(y) = \epsilon_Y(y) = y$ である. ゆえに, f は全射である. □

単射と全射は, 定義上はあまり相互に関係があるとは思えないが, 命題 4.6 や定理 4.8 を見てみると, 単射と全射は '左右対称的' な関係にあることが見えてくる.

系 4.9. X から Y への単射が存在する $\iff$ Y から X への全射が存在する.

証明. $f : X \to Y$ が単射ならば, 定理 4.8(1) から f の左逆写像 $g : Y \to X$ が存在するが, このとき g は右逆写像 f を持つから, 定理 4.8(2) から g は全射である. 逆の議論も同様である. □

♦ **例 4.10** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$ とする. f は全射ではないから, f は右逆写像を持たない. 一方で f は単射だから, f の左逆写像は存在する. 例えば, 次の写像 $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を考える:

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} y/2 & (y \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (y \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

任意の $x \in \mathbb{Z}$ について, $\tilde{f}(f(x)) = \tilde{f}(2x) = (2x)/2 = x$ である. よって, $\tilde{f} \circ f = \epsilon_{\mathbb{Z}}$ であり, $\tilde{f}$ は f の左逆写像である. この計算でわかるように, y が奇数のときの $\tilde{f}(y)$ の値はどう定義されていてもよい. したがって, f の左逆写像は無数に存在する. □

♦ **例 4.11** 例 1.3 の写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = (n \text{ の約数の個数})$ は単射ではないから, f の左逆写像は存在しない. 一方, f は全射だから, 右逆写像は存在する. 例 3.9 の議論から, $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, y \mapsto 2^{y-1}$ は f の右逆写像である. 一般に p を素数とするとき, $\tilde{f}(y) = p^{y-1}$ は f の右逆写像である. よって, f の右逆写像は無数に存在する. □

▶ **演習 4.7** m, n を自然数 (ただし $m \leq n$) とし, X を m 個の元から成る有限集合, Y を n 個の元から成る有限集合とする. $f : X \to Y$ が単射であるとき, f の左逆写像 $\tilde{f} : Y \to X$ は全部で何個あるか?

4.3　逆写像

全単射と逆写像

定理 4.12. 任意の写像 $f : X \to Y$ について, 次の条件は全て同値である:

(1) f の左逆写像と右逆写像がそれぞれ存在する.
(2) 写像 $\tilde{f} : Y \to X$ で, f の左逆写像かつ右逆写像になっているものが存在する.
(3) f は全単射である.

証明. (1)⇒(2): $f' : Y \to X$ を f の左逆写像, $f'' : Y \to X$ を右逆写像とするとき, それぞれ $f' \circ f = \epsilon_X$, $f \circ f'' = \epsilon_Y$ なので, 合成の結合則 (命題 4.4) を用いれば,

$$f' = f' \circ \epsilon_Y = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = \epsilon_X \circ f'' = f'' \tag{8}$$

である. したがって, $f' = f''$ であり, この写像を $\tilde{f}$ とすればよい.

(2)⇒(3): $\tilde{f}$ は f の左逆写像だから, 定理 4.8(1) から f は単射である. 同じく, $\tilde{f}$ は f の右逆写像でもあるから, 定理 4.8(2) から f は全射でもある.

(3)⇒(1): f は単射なので, 定理 4.8(1) から f の左逆写像が存在する. 同じく f は全射でもあるから, 定理 4.8(1) から f の右逆写像が存在する. □

定理 4.12 から, $f : X \to Y$ が全単射であるとき, かつそのときに限り, f の左右どちらの逆写像にもなっている写像 $\tilde{f} : Y \to X$ が存在するが, この写像 $\tilde{f}$ のことを

$$f^{-1} : Y \to X$$

と書いて, f の**逆写像**と呼ぶ. f^{-1} は f の左逆写像であり, 同時に右逆写像でもあるから,

$$f^{-1} \circ f = \epsilon_X, \quad f \circ f^{-1} = \epsilon_Y$$

である.

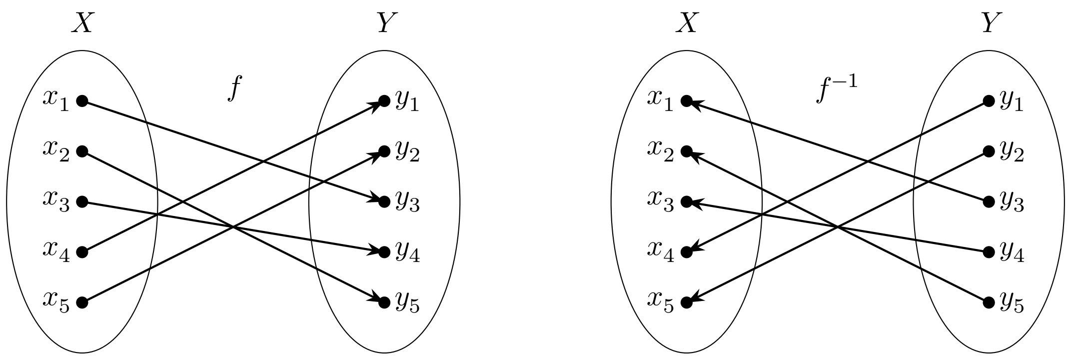


図 15　全単射 $f : X \to Y$ とその逆写像 $f^{-1} : Y \to X$.

逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ は図 15 のように f の矢印を全て反転させた写像であり, f が X から Y への写像であることに対して, f^{-1} は Y から X への写像である. 任意の $x \in X$, $y \in Y$ について, 次の同値が成立する:

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y). \tag{9}$$

また, f^{-1} の立場から見れば, f が f^{-1} の逆写像になっている. (特に, f^{-1} も全単射である.) すなわち,

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

である.

命題 4.13. f が全単射であるとき, f の逆写像は唯一つである.[*13]

証明. f', f'' が共に f の逆写像であるとする. f' は f の左逆写像, f'' は右逆写像なので, 定理 4.12 の (1)⇒(2) の証明で示した式 (8) から, $f' = f''$ である. よって, f の逆写像は唯一つである. □

「〜が唯一つである」ことを証明するための論法として, **2 つ以上存在する場合を想定しても, そのうちの任意の 2 つが必ず一致してしまう**ことを示すという方法がよく用いられる. 命題 4.13 の証明はその典型例である.

♦ **例 4.14**　例 3.15 で考えた写像

$$f : \mathbb{Z}_{15}^* \to \mathbb{Z}_{15}^*, \quad x \mapsto x^3 \bmod 15$$

は全単射である. これの逆写像は, 実は f 自身である. このことは, 地道な計算で直接確かめられる. ここでは詳しい話には触れないが, このことには実は裏にはもっと一般的な仕掛けがある. (第 3 巻『同値関係』第 3 節を参照.) □

♦ **例 4.15**　p を素数, $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ とおく. $a \in \mathbb{Z}_p^*$ として, 写像 $f_a : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*$ を次の式で定める:

$$f_a(x) = a^x \bmod p.$$

例 3.16 で見たように, $p = 7$, $a = 3$ のとき, f_a は全単射である. 一方で, 同じ $p = 7$ の場合でも, $a = 2$ のときは f_a は単射でも全射でもない.

詳しい話は省略するが, 実は任意の素数 p に応じて, f_a が全単射となる $a \in \mathbb{Z}_p^*$ が必ず存在することが知られている. そのような a は p を法とする**原始根**と呼ばれている. 例えば, $p = 7$ のときには, f_a が全単射となる $a \in \mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ は $a = 3$ と $a = 5$ の 2 つであり, これらが原始根となる. a が原始根であるとき, f_a は全単射なので, その逆写像 $g_a : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*$ が存在する. 任意の $y \in \mathbb{Z}_p^*$ について,

☕ Coffee Break ☕

逆像 (原像) と逆写像を区別しよう

記号 f^{-1} は逆像と逆写像の両方の意味で用いられるが, 逆像と逆写像は別々の概念であり, 混同してはいけない. 逆像 $f^{-1}(B)$ は式 (3) で定義されるように**始集合の部分集合**であるが, 逆写像 f^{-1} は**それ自身が一つの写像である**. 式 (9) の右辺は逆写像 f^{-1} による y の像が x だという意味なので, $x \in f^{-1}(y)$ ではなく $x = f^{-1}(y)$ と書いている.

[*13] これに対して, f が全射ではない単射ならば f の左逆写像は複数存在する. 対称的に, f が単射ではない全射ならば f の右逆写像は複数存在する.

$g_a(y)$ は

$$y = a^x \bmod p$$

を満たす指数 $x \in \mathbb{Z}_p^*$ であるが, この x を p を法, a を**底**とする y の**離散対数**と言う. p が十分大きな素数であるとき, 与えられた原始根 a と $y \in \mathbb{Z}_p^*$ から離散対数 $x = g_a(y)$ の値を計算することは, 計算量的な観点から見れば現在のところ困難であると考えられている. 離散対数を求める計算の困難性は, 現代の暗号技術の中で利用されている. □

♦ **例 4.16** 演習 3.6(1) から, 次の写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ は全単射である:

$$f(n) = \begin{cases} 2n & (n > 0 \text{ のとき}) \\ -2n+1 & (n \leq 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

f の逆写像を求めよう. $y \in \mathbb{N}$ とする. y が偶数であるときは, $x = y/2$ は自然数であり, $f(x) = 2x = y$ となる. y が奇数のときは, $x = (1-y)/2$ は 0 以下の整数であり, $f(x) = -2x+1 = y$ となる. このことから, 次の写像 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$g(y) = \begin{cases} y/2 & (y \text{ が偶数のとき}) \\ (1-y)/2 & (y \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

が f の逆写像であることがわかる. □

▶ **演習 4.8** 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が共に全単射ならば, 命題 4.5 から合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全単射であるが, このとき

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

が成立することを示せ.[*14]

▶ **演習 4.9** 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ について,「$g \circ f = \epsilon_X$ ならば, $f \circ g = \epsilon_Y$ でもある」という主張を P とする.

(1) 主張 P に対する次の証明の誤りを指摘せよ.
(誤証明) $g \circ f = \epsilon_X$ なので, $(g \circ f)^{-1} = \epsilon_X^{-1} = \epsilon_X$ となる. 演習 4.8 から, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である. よって, $f^{-1}g^{-1} = \epsilon_X$ となる. この両辺に, f を左から, g を右からそれぞれ合成すれば, $\epsilon_Y = f \circ g$ となる.
(2) 主張 P は実際には誤りである. 主張 P が成立しない f, g の実例を挙げよ.

▶ **演習 4.10** X を 3 個以上の元から成る集合とし, σ を X 上の置換とする. X 上の全ての置換 τ について, $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ が成り立っているとする. このような置換 σ は恒等置換 ϵ_X に限ることを示せ.

5 直積集合再論

直積集合については, 第 1 巻『集合と論理』4.6 項で既に最も基本的なことは説明したが, ここでは直積集合についてちょっと進んだことを簡単に解説する. (最初は 5.1 項のみを読んで, 後は省略してもよい.)

[*14] これは積の逆行列の公式 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ と同じような構造の公式である.

5.1　無限直積

第 1 巻『集合と論理』4.6 項で述べたように, 有限個の集合 $A_1, \dots, A_n$ の直積 $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ は

$$A = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \text{各番号 } 1 \leq i \leq n \text{ に対して } a_i \in A_i \text{ である}\}$$

で定義される. A の元は各々の A_i の元 a_i を一つずつ順に並べた n-項順序組 $a = (a_1, \dots, a_n)$ であるが, この組 a のことを次の条件 $\mathbf{P}$ を満たす写像の一つと見ることができる:

> $\mathbf{P}$: a は添字集合 $I = \{1, \dots, n\}$ から和集合 $U = \bigcup_{i \in I} A_i$ への写像で, 全ての添字 $i \in I$ に対して $a(i) \in A_i$ である. (もちろん, $a(i)$ は a_i のことを指している.)

例えば, 図 16 は $a(1) = v$, $a(2) = w$, $a(3) = x$, $a(4) = y$ で定まる写像 $a \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ を表している. これを順序組として表すと $a = (v, w, x, y)$ となる.

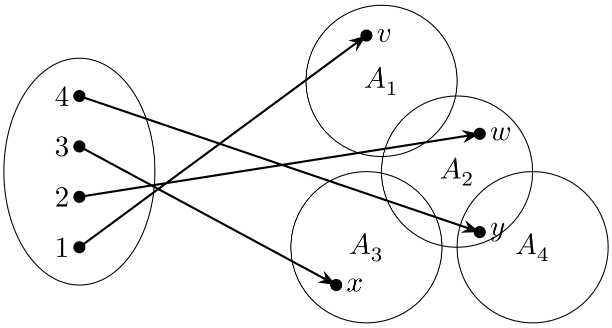


図 16　直積集合 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ の元となる写像の一例.

逆に, 条件 $\mathbf{P}$ を満たす写像 a があれば, 像 $a_i = a(i) \in A_i$ を順番に並べた n-項順序組 $a = (a_1, \dots, a_n)$ が作られるが, これは直積集合 A の元である. この見方の下で, 直積集合 A のことを

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{a \mid a \text{ は条件 } \mathbf{P} \text{ を満たす写像 } I \to U \text{ である}\}$$

と見なすことができる. この考え方では, **直積集合は写像の集合である. 直積集合の元が順序組として書かれること自体はもはや本質ではなく, それは一つの表現手段に過ぎない**.

この考え方に沿えば, 無限個の集合に対する直積集合, つまり**無限直積**も無限順序組のような不自然なものを考えることなく自然に定義できる. $\{A_i\}_{i \in I}$ を添字集合 I をもつ任意の集合族とするとき, それらの直積集合を

$$\prod_{i \in I} A_i = \{a : I \to U \mid \text{全ての } i \in I \text{ について } a(i) \in A_i \text{ である}\} \tag{10}$$

と定義する. ここで, $U = \bigcup_{i \in I} A_i$ である. $a(i)$ のことを a の A_i**-成分**と呼ぶ.

♦ **例 5.1**　$P = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とおく. ただし, 自然数 n に対して,

$$A_n = \begin{cases} \mathbb{Q} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

であるとする. P の元は, $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像 a で, 全ての n について $a(n) \in A_n$ となるものである. つまり, P は有理数と無理数が交互に現れる実数列の全体である. ただし, 初項 $a(1)$ は有理数である. □

♦ **例 5.2**　X, Y を空でない任意の集合とする．Y を $|X|$ 個用いた直積集合を Y^X と書く．つまり，

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y_x, \quad (\text{ただし全ての } x \in X \text{ について } Y_x = Y).$$

式 (10) に従うと，Y^X は「X から $\bigcup_{x \in X} Y_x = Y$ への写像 a で，全ての $x \in X$ について $a(x) \in Y$ であるものの全体」である．つまり，Y^X は「X から Y への写像の全体」である．例 1.19 で Y^X という記法を用いたのはこれが理由である．

具体例として，$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ を考えよう．Y^X は Y を $|X| = 3$ 個用いた直積集合 $Y^3 = Y \times Y \times Y$ である．成分を前から順番に a-成分, b-成分, c-成分と見るとき，組 $f = (3, 1, 2) \in Y^X$ は $a \mapsto 3$, $b \mapsto 1$, $c \mapsto 2$ で定まる写像 $f : X \to Y$ を表している．また，$a \mapsto 2$, $b \mapsto 4$, $c \mapsto 1$ で定まる写像 $g : Y \to X$ は組 $g = (2, 4, 1)$ で表される．□

5.2　直積の抽象化

前項で，集合族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して，これらの集合 X_i らに渡る直積集合 $X = \prod_{i \in I} X_i$ は，添字集合 I から和集合 $U = \bigcup_{i \in I} X_i$ への写像 ϕ で，全ての $i \in I$ について $\phi(i) \in X_i$ であるものの集まりであると定義した．任意の $\phi \in X$ について，$\phi(i)$ をその X_i-**成分**と呼ぶが，ϕ をその X_i-成分に変換する写像

$$\pi_i : X \to X_i, \quad \pi_i(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(i), \qquad \forall \phi \in X$$

を X_i-成分への**射影**と言う．

命題 5.3. $X = \prod_{i \in I} X_i$ を直積集合，$\pi_i : X \to X_i$ をその X_i-成分への射影とする．

(1) $\phi, \psi \in X$ とする．全ての $i \in I$ について $\pi_i(\phi) = \pi_i(\psi)$ ならば，$\phi = \psi$ である．
(2) 各々の X_i から任意の元 x_i が選ばれてきたと仮定する．このとき，ある $\phi \in X$ が存在して，全ての $i \in I$ に対して $\phi(i) = x_i$ が成り立つ．

証明. (1) ϕ, ψ は共に I から U への写像であり，全ての $i \in I$ について $\phi(i) = \pi_i(\phi) = \pi_i(\psi) = \psi(i)$ であるから，$\phi = \psi$ である．

(2) 写像 $\phi : I \to U$ を $\phi(i) = x_i$ で定義すればよい．□

この命題の (1) は，直積 X の 2 つの元は全ての X_i-成分が互いに一致するときには同じ元であることを主張しているが，言い方を変えれば，どこかの X_i-成分で違いがあるような 2 つの元は互いに異なるということである．これはつまり，**直積集合の元は，各々の X_i-成分から一意的に決まる**ことを意味している．一方，(2) は各々の X_i から任意の元 x_i を一つずつ指定したとき，X にはそれらを成分とするような元が存在することを主張するが，(1) と合わせればそのような元は唯一つであることも言える．例えば，$S = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$ と $T = \{A, 2, 3, \ldots, J, Q, K\}$ の直積集合 $S \times T$ はジョーカーを除く 52 枚のトランプカードの全体であるが，条件 (1) と (2) はそれぞれ次のことを意味している:

- 2 枚のカードは，マークと数字がそれぞれ一致していれば，同じカードである．
- どのマーク $x \in S$ とどの数字 $y \in T$ を取っても，マークが x で数字が y であるカードが (唯一つ) 存在する．

どちらも当たり前のことだが，実はこれら 2 つの特徴をもって直積集合をさらに抽象的な立場からうまく再定義することができる．その意味で，命題 5.3 で述べた 2 つの条件は直積集合の本質的な特徴を突いている

と言える．そのことを説明するために, 次の定義を用いる．

抽象直積

定義 5.4. $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族, A を集合とする．写像の集合 $\rho = \{\rho_i : A \to X_i\}_{i\in I}$ が存在して次の 2 つの条件 P1, P2 が満たされているとき, A と ρ の組 (A, ρ) は集合 X_i らの**抽象直積**であると言い, 写像 ρ_i らをそれに付随する**射影**と呼ぶ．

P1: 任意の $a, a' \in A$ について,

$$\text{全ての } i \in I \text{ に対して } \rho_i(a) = \rho_i(a') \Rightarrow a = a'$$

が成り立つ．

P2: 各々の X_i から任意の元 x_i が選ばれてきたと仮定する．このとき, ある $a \in A$ が存在して, 全ての $i \in I$ に対して $\rho_i(a) = x_i$ が成り立つ．

ここで,「抽象直積」という用語は本巻のみで用いることを意図した方言であるが, 文字通り直積を抽象化したものという程度の意味が込められている．定義の条件 P1, P2 は明らかに命題 5.3 の 2 つの条件にそれぞれ相当するものであり, このように抽象直積とは命題 5.3 の 2 条件こそが直積集合を特徴づける本質だと考えることによって定義される, その名の通り従来の直積集合を抽象化した概念である．数学では, 具体的な事例や対象の中から本質的な性質を取り出すことで抽象的な概念が生まれることはよくある話だが, 抽象直積はその一例だと思ってもらえればいい．

定義上, 抽象直積は集合 A と射影の族 ρ との組で定まる概念であるが,「集合 A は射影族 ρ の下で抽象直積である」とも言う．いずれの言い方でも, **抽象直積は集合 A のみで決まる概念ではなく, 射影 ρ がセットになって定まる概念である**ことが重要なポイントである．

直積が抽象直積に抽象化されると, 一口に「集合 X_i らの直積」と言っても, その射程には本来の意味での直積集合以外の集合も入ってくる．(本来の意味での直積集合以外の集合が射程に入らないのなら, わざわざ抽象直積などという概念を考える意義はない.) つまり, **集合 X_i らの抽象直積集合は文字通りの意味で一意的に決まる集合ではない**．しかし, 一方で「集合 X_i らの直積」の射程が無節操に広くなりすぎるのも考えもので, それはその抽象化がうまくない (直積の本質をうまく捉えきれていない) サインだと思った方がいいだろう．

定義 5.4 で定められた抽象直積については, 次の命題に示す通り,「集合 X_i らの直積」の射程に入る集合はごく合理的な範囲にとどまる．

命題 5.5. $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族, $X = \prod_{i\in I} X_i$ を直積集合, A を集合とする．A が集合 X_i らの抽象直積であるためには, 全単射 $f : A \to X$ が存在することが必要十分である．

証明. X の射影を $\pi_i : X \to X_i$ で表す．

(I) A が集合 X_i らの抽象直積であると仮定して, A の射影を $\rho_i : A \to X_i$ で表す．任意の $a \in A$ を考える．命題 5.3 から, 元 $f(a) \in X$ で, 全ての $i \in I$ に対して $\pi_i(f(a)) = \rho_i(a)$ を満たすものが唯一つ存在する．これで写像 $f : A \to X$ が定まるが, これが全単射であることを示す．$a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ とすると, 全ての $i \in I$ について $\rho_i(a) = \pi_i(f(a)) = \pi_i(f(a')) = \rho_i(a')$ なので, 条件 P1 から $a = a'$ である．よって, f は単射である．任意の $\phi \in X$ を考える．条件 P2 から, ある $a \in A$ が存在して, 全ての $i \in I$ について $\rho_i(a) = \pi_i(\phi)$ が成り立つ．全ての $i \in I$ について, $\pi_i(\phi) = \rho_i(a) = \pi_i(f(a))$ なので,

命題 5.3 から $\phi = f(a)$ である．ゆえに, f は全射でもある．したがって, f は全単射である．

(II) 全単射 $f : A \to X$ が存在すると仮定する．各々の $i \in I$ について $\rho_i = \pi_i \circ f$ とおく．ρ_i は P から X_i への写像であるが, A はこれらを射影として集合 X_i らの抽象直積になっていることを示す．$a, a' \in A$ とし, 全ての $i \in I$ について $\rho_i(a) = \rho_i(a')$ であると仮定する．全ての $i \in I$ について $\pi_i(f(a)) = \rho_i(a) = \rho_i(a') = \pi_i(f(a'))$ なので, 命題 5.3 から $f(a) = f(a')$ であるが, f は単射なので $a = a'$ である．よって, 条件 P1 が成り立つ．次に条件 P2 を示すために, 各々の X_i から任意の元 x_i が選ばれてきたと仮定する．命題 5.3 から, ある $\phi \in X$ が存在して, 全ての $i \in I$ について $\pi_i(\phi) = x_i$ が成り立つ．f は全単射なので, $f(a) = \phi$ を満たす $a \in A$ が唯一つ存在する．そして, 全ての $i \in I$ について $\rho_i(a) = \pi_i(f(a)) = \pi_i(\phi) = x_i$ である．したがって, 条件 P2 も成り立つ． □

この命題の主張を平たく言えば, **集合 X_i らの抽象直積はどれも本来の意味での直積集合 $X = \prod_{i \in I} X_i$ と全単射で結ばれるし, 逆に X と全単射で結ばれるような集合はどれも何らかの射影の下で集合 X_i らの抽象直積となる**ということである．もっと平たい表現としては, 集合 X_i らの抽象直積とは, 本来の意味での直積集合と同じ '大きさ' の集合だということである.*15

命題 5.5 の証明のパート (II) を見れば分かる通り, A が直積集合 X と全単射 $f : A \to X$ で結ばれる集合であるとき, A は写像 $\rho_i = \pi_i \circ f$ らを射影とする抽象直積集合である．つまり, 任意の $a \in A$ について, その X_i-成分は $\pi_i(f(a))$ であると考えればよいということである．このように, **抽象直積集合とは, 各々の元に対する '成分' らを適切に設定することで実質的に本来の意味での直積集合と同じだと考えてることができる集合のことである**と言える．

♦ **例 5.6** トランプのカード (ただしジョーカーは除く) はマーク・数字という 2 つの成分を持っている．$S = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, $T = \{A, 2, 3, \dots, 10, J, Q, K\}$ とおくと, 直積集合 $S \times T$ で 52 枚のトランプカード全体を表現できる．それら全てのカードを任意の順番で一列に並べよう．例えば, カードをマークごとに分類しておき, 数字順に規則正しく並べて, マークを $\heartsuit$, $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$ の順番に並べれば,

$$\heartsuit A, \heartsuit 2, \dots, \heartsuit K, \clubsuit A, \clubsuit 2, \dots, \clubsuit K, \diamondsuit A, \diamondsuit 2, \dots, \diamondsuit K, \spadesuit A, \spadesuit 2, \dots, \spadesuit K$$

のように並ぶ．これに前から順番に番号 $1, 2, 3, \dots, 52$ を振っていけば, $A = \{1, 2, \dots, 52\}$ から $S \times T$ への全単射 f が構成できる．この f を通して A は S と T の抽象直積だと見なせる．$a \in A$ に対して, $f(a)$ のマークが a の S-成分であり, $f(a)$ の数字が T-成分である．例えば, $f(16) = \clubsuit 3$ だから, $\rho_S(16) = \clubsuit$, $\rho_T(16) = 3$ である．この見方の下では, 16 は 2 つの成分 $\clubsuit$, 3 によって記述・特定される数だということになる． □

♦ **例 5.7** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ とおく．例 3.17 から, 写像 $f : A \times B \to \mathbb{N}$, $f(a, b) = 2^a b$ は全単射である．これの逆写像 $g : \mathbb{N} \to A \times B$ もまた全単射である．g を通して, $\mathbb{N}$ を A と B の抽象直積と見なすことができる．任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $g(n)$ の A-成分と B-成分をそれぞれ n の A-成分, B-成分と見なせばいい．具体的には, n を $n = 2^a b$ $(a \in A,\ b \in B)$ という形式に因数分解したときの a, b がそれぞれ n の A-成分, B-成分である．例えば, $60 = 2^2 \times 15$ なので, $\rho_A(60) = 2$, $\rho_B(60) = 15$ という具合である． □

次の定理は, 抽象直積は集合の元に直接タッチすることなく写像の言葉のみで定義できることを示しているが, これは圏論 (カテゴリー論) 的な直積集合の見方である．

*15 全単射で結ばれる 2 つの集合は同じ大きさ (元の個数が同じ) であると考えられる．

抽象直積の普遍性

定理 5.8. $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族, A を集合, $\rho = \{\rho_i : A \to X_i\}_{i\in I}$ を写像の集合とする. (A,ρ) が集合 X_i らの抽象直積であるためには, 任意の集合 S および任意の写像集合 $\{\phi_i : S \to X_i\}_{i\in I}$ に応じて, 全ての $i \in I$ について

$$\rho_i \circ \phi = \phi_i$$

を満たす写像 $\phi : S \to A$ が唯一つ存在することが必要十分である.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\exists!\phi"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & A \arrow[d, "\rho_i"] \\ & X_i. \end{tikzcd} \tag{11}$$

証明. (I) (A,ρ) が集合 X_i らの抽象直積であると仮定する. 定理文中にある通り, 任意の S と ϕ を考える. 定義 5.4 の条件 P2 から, 任意の $s \in S$ に応じてある元 $\phi(s) \in A$ が存在して, 全ての $i \in I$ について $\rho_i(\phi(s)) = \phi_i(s)$ が成り立つ. しかも, 条件 P1 からその $\phi(s)$ は s から唯一つに決まることも言える. これで写像 $\phi : S \to A$ が定まる. この定義から, 全ての $i \in I$ について $\rho_i \circ \phi = \phi_i$ であることは明らかである.

ϕ の一意性を示そう. 写像 $\psi : S \to A$ が全ての $i \in I$ について $\rho_i \circ \psi = \phi_i$ を満たしていると仮定する. 任意の $s \in S$ について, どの $i \in I$ に対しても

$$\rho_i(\psi(s)) = \phi_i(s) = \rho_i(\phi(s))$$

だから, 条件 P1 から $\psi(s) = \phi(s)$ である. これが全ての $s \in S$ について言えるので, $\psi = \phi$ である. これで ϕ の一意性も示された.

(II) (A,ρ) に対して定理文中にある条件が満たされていると仮定して, (A,ρ) が集合 X_i らの抽象直積であることを示す. 定義 5.4 の条件 P1 と P2 が成り立つことを示せばよい.

$S = \{0\}$ とおく. $a, a' \in A$ が全ての $i \in I$ について $\rho_i(a) = \rho_i(a')$ を満たしていると仮定する. 各々の $i \in I$ について, 写像 $\phi_i : S \to A_i$ を $\phi_i(0) = \rho_i(a) = \rho_i(a')$ で定義する. 仮定から, 写像 $\phi : S \to A$ で, 全ての $i \in I$ について $\rho_i \circ \phi = \phi_i$ を満たすものが唯一つ存在する. 写像 $f : S \to A$, $f(0) = a$ を考えると, 全ての $i \in I$ について $\rho_i(f(0)) = \rho_i(a) = \phi_i(0)$ であり, すなわち $\rho_i \circ f = \phi_i$ が成り立つ. よって, $f = \phi$ である. 写像 $g : S \to A$, $g(0) = a'$ にも同様の議論が通用するから, $g = \phi$ も得られる. よって, $f = \phi = g$ であり, $a = f(0) = g(0) = a'$ が成り立つ. したがって, 条件 P1 が成り立つ.

次に条件 P2 を示す. 各々の X_i から任意の元 x_i が選ばれてきたと仮定する. 写像 $\phi_i : S \to X_i$ を $\phi_i(0) = x_i$ で定義する. 仮定から, 写像 $\phi : S \to A$ で, 全ての $i \in I$ について $\rho_i \circ \phi = \phi_i$ を満たすものが唯一つ存在する. $a = \phi(0) \in A$ とおくと, 全ての $i \in I$ について $\rho_i(0) = \rho_i(\phi(0)) = \phi_i(0) = x_i$ である. よって, 条件 P2 も成立する. □

▶ **演習 5.1**　定理 5.8 を利用して, (A,ρ) が空でない[*16]集合 X_i らの抽象直積集合であるとき, 射影 $\rho_i : A \to X_i$ らは全射であることを証明せよ.

[*16] 何らかの X_i が一つでも空集合であれば, A も空集合である. その場合には, $\rho_i : A \to X_i$ は空写像であるが, $X_i \neq \emptyset$ のときにはこれは全射ではない.

5.3 （ついでに）直和の抽象化

ここで説明してきたような抽象的視点を持つことの利点の一つとして, 直積と直和が言わば‘兄弟’の関係にあることがはっきりと見えやすくなることが挙げられる．念の為復習しておくと, 集合 $\{X_i\}_{i\in I}$ らの直和, あるいは形式的非交和とは, 集合

$$U = \{(x,i) \mid i \in I,\ x \in X_i\} \tag{12}$$

のことである (→第 1 巻『集合と論理』例 4.20)．これは, 集合 X_i らを形式的に互いに交わらないものと見なして作られる和集合であり, (x,i) は「X_i の元としての x」を表している．実は, この集合は定理 5.8 で述べた抽象直積の特徴と言わば‘鏡像関係’にある特徴を持っている．

命題 5.9. $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合族, U をそれらの直和集合とする．各々の $i \in I$ について, 写像 $\sigma_i : X_i \to U$ を

$$\sigma_i(x) \overset{\text{def}}{\equiv} (x,i) \in U, \qquad \forall x \in X_i \tag{13}$$

で定める．このとき, 任意の集合 S と任意の写像族 $\{\phi_i : X_i \to S\}_{i\in I}$ に応じて, ある写像 $\phi : U \to A$ が存在して, 全ての $i \in I$ に対して $\phi \circ \sigma_i = \phi_i$ が成り立つ:

$$\begin{tikzcd} S & U \arrow[l, "\exists!\phi"'] \\ & X_i. \arrow[u, "\sigma_i"'] \arrow[ul, "\phi_i"] \end{tikzcd} \tag{14}$$

なおかつ, この条件を満たす写像 ϕ は唯一つである．

図式 (11) と図式 (14) を見比べてみよう．図式 (11) において A を U に置き換え, ρ_i を σ_i に置き換え, そして矢印の向きを全て反転させれば図式 (14) になる．これが (特に, 矢印の向きがきれいに反転するところが), 直積と直和が‘鏡像関係’だと言ったことの意味である．

証明. 写像 $\phi : U \to S$ を $\phi(x,i) = \phi_i(x)$ で定義する．($(x,i) \in U$ なので, $x \in X_i$ であり, したがって $\phi_i(x)$ は S の元として正しく定まることに注目.) 任意の $i \in I$ について, $\phi \circ \sigma_i(x) = \phi(x,i) = \phi_i(x)$ が全ての $x \in X_i$ について成り立つから, $\phi \circ \sigma_i = \phi_i$ である．これでまず ϕ の存在は分かった．次に, ϕ の一意性を示そう．写像 $\phi' : U \to S$ が全ての $i \in I$ について $\phi' \circ \sigma_i = \phi_i$ を満たしていると仮定して, $\phi' = \phi$ であることを示せばよい．任意の $(x,i) \in U$ について,

$$\phi'(x,i) = \phi'(\sigma_i(x)) = \phi_i(x) = \phi(\sigma_i(x)) = \phi(x,i)$$

が成り立つので, $\phi' = \phi$ である． □

定理 5.8 と同じ要領で, 命題 5.9 で示した性質が直和集合を特徴づける性質であることを示すことができる．すなわち, 命題 5.9 で示した性質は, 言わば‘抽象直和集合’の定義条件になっているということである．それを形式的に次のように定義しておこう．(圏論的な言葉遣いでは, ここで言う抽象直和は**双対直積**と呼ばれるものに当たる.)

抽象直和集合

定義 5.10. 集合 $\{X_i\}_{i\in I}$ らの**抽象直和集合**とは, 集合 A と写像の族 $\varepsilon = \{\varepsilon_i : X_i \to A\}_{i\in I}$ との組 (A, ε) で次の条件を満たすもののことを言う:

任意の集合 S および任意の写像集合 $\{\phi_i : S \to X_i\}_{i \in I}$ に応じて, 全ての $i \in I$ について

$$\phi \circ \varepsilon_i = \phi_i$$

を満たす写像 $\phi : A \to S$ が唯一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} S & A \arrow[l, "\exists!\phi"'] \\ & X_i. \arrow[u, "\varepsilon_i"'] \arrow[ul, "\phi_i"] \end{tikzcd}$$

ここに現れる写像 ε_i らを**埋め込み**と呼び, 写像 ϕ は埋め込み ε_i らによる写像 ϕ_i らの**拡張**であると言う.

命題 5.9 は, 式 (12) の直和集合 U が式 (13) の写像 σ_i らを埋め込みとして集合 X_i らの抽象直和集合になっていることを意味している.

抽象直積のときと同様の事情だが, 抽象直和も集合 A だけではなくて, それに付随する埋め込みらがペアになって定まる概念である. なお,「埋め込み」や「拡張」という言葉のイメージは, ちょっとややこしいが, 次のとおりである. 演習 5.1 で見たように, 抽象直積に付随する射影らは全射であったが, それに対して抽象直和に付随する埋め込み ε_i は単射である (→演習 5.2). したがって X_i の各々の元 x とその像 $\varepsilon_i(x)$ を同一視すれば, X_i は単射 ε_i によって仮想的に A の中に部分集合として送り込まれていると考えることができる. いや, X_i は A の部分集合だと考えるのなら, いっそのこと ε_i は包含写像 (→例 1.9) だと思ってしまってもいい. そうすると, $\phi \circ \varepsilon_i = \phi_i$ は ϕ が ϕ_i の拡張になっていること (ϕ の始域を X_i に制限すれば ϕ_i が得られること) を意味していると思える.[17] これが, ϕ が ϕ_i らの「拡張」になっているというイメージである.

▶ **演習 5.2** 定義 5.10 において, 埋め込み ε_i らは単射であることを示せ.

抽象直和集合

定理 5.11. $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合族, A を集合とし, U を集合 X_i らの直和集合 (式 (12)) とする. このとき, A が何らかの埋め込みの下で集合 X_i らの抽象直和集合であるためには, 全単射 $U \to A$ が存在することが必要十分である.

証明. 以下, $\sigma_i : X_i \to U$ を式 (13) の写像 (U に付随する埋め込み) とする.

(I) A が埋め込みの族 $\varepsilon = \{\varepsilon_i : X_i \to A\}_{i \in I}$ の下で集合 X_i らの抽象直積になっているとする. 写像 σ_i らに対して, ある写像 $\phi : A \to U$ が唯一つ存在して, 全ての $i \in I$ について $\phi \circ \varepsilon_i = \sigma_i$ が成り立つ. 一方, 命題 5.9 から, 写像 ε_i らに対して, ある写像 $\psi : U \to A$ が唯一つ存在して, 全ての $i \in I$ について $\psi \circ \sigma_i = \varepsilon_i$ が成り立つ. 全ての $i \in I$ について,

$$(\phi \circ \psi) \circ \sigma_i = \phi \circ (\psi \circ \sigma_i) = \phi \circ \varepsilon_i = \sigma_i = \epsilon_U \circ \sigma_i$$

[17] 例 4.3 で見たように, 写像 $f : X \to Y$ と包含写像 $e : A \to X$ があるとき, 合成 $f \circ e$ は f の始域を A に制限した写像であり, $f \circ e$ から見れば f はその拡張になっていると考えられる.

が成り立つ．これは $\phi \circ \psi$ と ϵ_U が共に埋め込み σ_i らによる σ_i らの拡張であることを示しているが，拡張は一意的なので，$\phi \circ \psi = \epsilon_U$ である．対称的に，全ての $i \in I$ について，

$$(\psi \circ \phi) \circ \varepsilon_i = \psi \circ (\phi \circ \varepsilon_i) = \psi \circ \sigma_i = \varepsilon_i = \epsilon_A \circ \varepsilon_i$$

が成り立つことから，$\psi \circ \phi = \epsilon_A$ が得られる．よって，ϕ と ψ は互いに他方を逆写像とする全単射である．

(II) 全単射 $f : U \to A$ が存在すると仮定する．各々の $i \in I$ に対して，$\varepsilon_i = f \circ \sigma_i : X_i \to A$ とおく．A が ε_i らを埋め込みとして集合 X_i らの抽象直和であることを示せばよいが，それは演習として残しておく (→演習 5.3)． □

▶ **演習 5.3** 定理 5.11 におけるパート (II) の証明を完成させよ．

6 選択公理

第 1 巻『集合と論理』命題 4.22 から，有限個の空でない集合 $A_1, \ldots, A_n$ の直積集合 $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ は空集合ではない．これと同じことが無限直積，すなわち無限個の集合に渡る直積でも成り立つだろうか? 数学では，有限個の対象について成り立つことが無限個の対象を相手にすると成り立たなくなることがよくあるが，直積集合についてはどうだろう?

実は，この問題は集合論の深いところにつながっている．無限個の空でない集合の直積もやはり空ではないという主張は**選択公理**と呼ばれているが，これが ‘公理’ と呼ばれている時点で何かありそうだ．

選択公理 Axiom of Choice

公理 6.1. $\{A_i\}_{i \in I}$ を空でない集合だけから成る空でない集合族とするとき，直積 $\prod_{i \in I} A_i$ も空ではない．

直積集合の定義式 (10) から，「直積 $\prod_{i \in I} A_i$ も空ではない」という部分は次のように言い換えられる:

写像 $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ で，全ての $i \in I$ について $f(i) \in A_i$ となるものが存在する．

f は各々の A_i から元 $f(i)$ を 1 個ずつ選択する関数なので，**選択関数**と呼ばれる．選択公理は，どの A_i も空でない限りは選択関数 f が必ず存在することを主張している．あるいは，同じことを次のように表現することもできる (図 17):

集合 S で，全ての $i \in I$ について $S \cap A_i$ がただ一つの元から成るものが存在する．

ここで，$S \cap A_i$ が持つ唯一つの元というのが A_i から選ばれた代表元である．要するに，S は各々の A_i から代表元を一つずつ選ぶことで作られている集合であり，**選択集合**と呼ばれる．

選択公理は自明なのでは? 上で述べたどの表現を考えるにせよ，選択公理は空でない集合たちが与えられたとき，各々の集合から元を一つずつ ‘選択’ して写像あるいは集合を構成できることを主張している．(だからこそ，選択公理という名前がついている．) これは一見自明であり，わざわざ言及する必要もなさそうに見えるが，実際にはかなりの曲者である．一見自明と言うのは，おそらく誰でも思いつくであろうという次の議論のせいである:

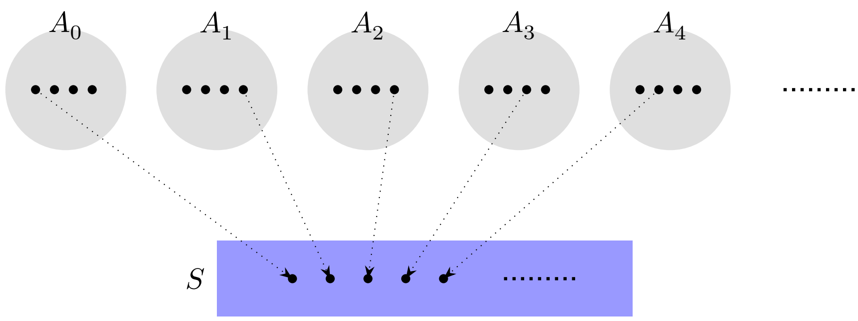


図 17　選択集合 S を作るイメージ．(ただし，一般には集合 $A_0, A_1, \ldots$ らは互いに交わっていてもよい.)

任意の $i \in I$ について $A_i \neq \emptyset$ だから，そこから任意の元を一つ選んでそれを $f(i)$ とすれば，選択関数 f が得られる．

選択公理と ZF 集合論　一方で，曲者だという事情について理解するためには，素朴集合論では解像度が全く足りず，公理的集合論に足を踏み入れる必要がある．

標準的な公理的集合論ということで，ここでは ZF 集合論 (→第 1 巻『集合と論理』第 5 節) を想定しよう．I が有限集合である場合には，上記の '自明' な議論に相当することは ZF 集合論における正当な証明に翻訳して記述できる．つまり，ZF で許された公理だけから選択関数の存在を導くことができる．しかし，I が無限集合である場合には同じようにはいかなくなる．ここで雲行きがちょっと怪しくなるが，雲行きはやがてこの上なく怪しくなっていく．実は，選択公理が正しいかどうかは，**ZF 集合論では原理的に確定できない**ことが判明している．つまり，ZF 集合論から見ると次のような状況であることが証明されている: ZF 自身に矛盾がない限り,*18

- (Kurt Gödel) ZF 集合論では，選択公理が偽であることは証明できない．
- (Paul Cohen) ZF 集合論では，選択公理が真であることも証明できない．

ここで「証明できない」とは，単に難しいから証明できないということではなく，**そもそも原理的に証明不可能**であることを意味する．ZF 集合論で選択公理を否定できるならば，ZF に選択公理を加えると矛盾が発生するが，Gödel は ZF が無矛盾であるという前提で，ZF に選択公理を加えても無矛盾であることを示し，結果として ZF では選択公理を否定できないことが分かった．(ZF+ 選択公理から選択公理の否定が導かれれば，ZF+ 選択公理という世界では選択公理とその否定が同時に成り立つことになり，そこには矛盾があることになる.) 一方で，Cohen は同じく ZF が無矛盾であるという前提で，ZF に選択公理の否定を追加しても無矛盾であることを示し，ZF では選択公理を肯定することもできないことが分かった．したがって，ZF 集合論が無矛盾である限り，ZF では選択公理の成否は断定できない．一方，ZF 集合論が矛盾含みだった場合には，ZF から選択公理もその否定も証明できることになるので，結局は選択公理の成否は一意的に断定できない．つまり，どう転んでも ZF からは選択公理の成否は一意的に断定できない．

こうして，**選択公理は ZF 集合論でその是非を論じられるものではない**という形で決着がついた．このことを指して，選択公理は ZF 集合論とは**独立**であるなどと言う．

ZF 集合論の視点から見てみると，選択公理は ZF 集合論とは独立だから，ZF に加えて選択公理を受け入

*18 ZF 自身に矛盾がないというのは最低限の前提である．矛盾を内包する理論上ではどんな命題でも証明可能なので，選択公理もその否定も証明可能である．しかし，そのような理論は「何でもアリ」状態に陥っており，破綻している．

れる道と, 反対に選択公理の否定を受け入れる道の両方が可能である．あるいは, 選択公理の諾否の判断は保留して ZF に留まるという選択肢もある．現在では, 数学の基礎に関わる一部の分野*19を除いて, 選択公理は一つの公理として肯定的に受け入れられていると言ってよい.*20 ZF に選択公理を受け入れた公理系は **ZFC** と呼ばれているが, ここの C は ‘Choice’ を表している．本シリーズでも, **選択公理を肯定的に受け入れる**ことにする．(正直に言えば, 本巻でもここまでのどこかで密かに選択公理を使っている箇所がある.)

補足 6.2　選択公理は ZF 集合論とは独立であるが, この結果は ZF という一つの集合論と選択公理という一つの命題との相対的な関係性を示したものであり, それを無視して単に「選択公理は真偽決定不能である」と言うのは正確ではない．公理的集合論として他のより ‘強力’ な集合論を採用すれば, その中では選択公理, あるいはその否定が証明可能ということもあり得る.*21 □

選択公理が要るとき・要らないとき　選択公理は, どの A_i も空ではないという条件さえ満たされていればいつでも必ず選択関数が存在することにお墨付きを与える．この「いつでも必ず」というところが, 選択公理の公理としてのパワーである．このパワーがその真価を発揮するのはもっぱら無限個の集合が関わる場合であるが, 無限個の空でない集合たちから選択関数を得るときには必ず選択公理が必要なのかと言えばそうでもない．例えば,

(1) 例 5.1 の直積集合 P が空でないことは, 選択公理を持ち出さずとも,

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \sqrt{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

のように具体的な選択関数を作ってやればわかる．

(2) 各々の A_i がベクトル空間であると分かっている場合には, それぞれの A_i から原点 (零ベクトル) を選ぶ選択関数を構成できる．

☕ Coffee Break ☕

選択公理はマジックに使える?

選択公理は直観的な感覚からすると自明なことだが, その一方で直観に反する不思議な帰結をもたらすことがある．その中でも最も有名なのが, おそらく **Banach-Tarski のパラドックス**だろう．簡単に言えば, これは球体を有限個のパーツに分割してバラバラにしてから適切に組み立て直せば元の球体と同じ大きさの球体が 2 個できることを示した定理である．これがパラドックスと呼ばれているのは, もちろんその結論が直観に反するからであるが, 選択公理を認める以上はれっきとした正当な定理であり, 論理的矛盾ではない．

何だかマジックのような定理だが, ここで行われる球体の分割は物理世界で現実に実行できるものではない．(なにせ, 体積を確定できないという, 物理世界ではあり得ないパーツが現れたりする.) だから, 残念なことに, Banach-Tarski のパラドックスをマジックのトリックに使うことはできそうにない．

*19 そもそも, 数学の基礎に関わる分野では, 選択公理自身が研究対象になっていたりするので, 選択公理を必ずしも前提にしないことは当たり前である．

*20 大きな声では言えないが, 選択公理を受け入れないと重要な定理がいくつも証明できなくなってしまうという**大人の事情**も現実としてはあるのだろう．

*21 例えば, ZFC では選択公理が成り立つ．もっとも, ZFC では選択公理がそもそも公理の一つとして入っているので, それは当然のことだ．

(3) 各々の A_i が $\mathbb{N}$ の空でない部分集合であるときには, それぞれの A_i から最小値 $\min A_i$ を選ぶ選択関数を構成できる.

抽象的な物言いをすれば, 各々の A_i の中に白い球が一つだけあって後は全て黒い球であるという状況では, 白い球を選ぶ選択関数を構成すれば, 選択公理によらず選択関数を構成できる. ここで「白い球」「黒い球」というのはもちろん比喩的表現であり, A_i の中に他の元とは明確に区別できる特徴を持った元が一つだけ存在している様子を言っているだけである. 例えば, (2) では原点が白い球でそれ以外の元が黒い球, (3) では $\min A_i$ が白い球で後は全て黒い球である.

一方で, A_i の全ての元が全く平等に見えているという状況では, たとえ各々の A_i がたった 2 個の元から成る場合であっても, 選択関数の存在を主張するには選択公理のパワーが必要である. この辺りの繊細な事情を公理的集合論の助けなく直観的感覚だけで理解することはかなり難しく,「選択公理は自明だ」という直観的感覚が邪魔になるとすら言えるかも知れない.

隠れ選択公理　さて, 選択公理はあまりにも自明に見えるせいか, 選択公理がごく自然にしれっと使われているところでは, そこに選択公理が隠れていることに全く気づかないなどということも珍しくない. 例えば, 定理 4.8(2) の証明を振り返ってみよう. 特に,「f が全射 $\Rightarrow$ f の右逆写像が存在する」という部分の議論では, 右逆写像 $\tilde{f}$ の構成に実は選択公理がこっそり使われている. ここの部分の議論を選択公理の使用を明示的に書けば, 次のような感じになる.

> $f : X \to Y$ が全射であると仮定する. どの $y \in Y$ に対しても原像 $f^{-1}(y)$ は空集合ではない. よって, 選択公理から, 全ての $y \in Y$ に対して $g(y) \in f^{-1}(y)$ を満たす選択関数 $g : Y \to X$ が存在する. g の取り方から, 全ての $y \in Y$ について $f(g(y)) = y$ であり, すなわち $f \circ g = \epsilon_Y$ である. つまり, g は f の右逆写像である.

普通はここまで丁寧に選択公理の使用を明示する書き方をすることは少なく, 定理 4.8(2) の証明のところで書いたような ‘自然’ な書き方をすることが多いが, 選択公理はそのような ‘自然’ な書き方を正当化してくれるものだとも言える. 私たちが特に意識していなくても隠れて働いてくれる ‘縁の下の力持ち’ といったところだ.

なお, 定理 4.8(2) の主張を仮定すれば選択公理を定理として導くことができる (→演習 6.1). だから, 定理 4.8(2) の主張は論理的には選択公理と同値であって, それを選択公理の一表現と見なすことができる.

▶ **演習 6.1**　定理 4.8(2) の主張を仮定して選択公理を導け.

付録 A　演習問題解答例

ここに示されているのはあくまで解答の一例であり，これだけが唯一絶対の正しい解答というわけではない．参考程度の略解という位置付けである．

演習 1.1.　(1) f は多価関数になっている．例えば，$z=4$ に対する出力 $f(4)$ が 2 通り (2 と -2) ある．

(2) A が無限集合であるとき，$f(A)=|A|$ は整数値ではない．

(3) $f(x,0)$ の値 ($x/0$ のこと) が定義されない．

(4) x が無理数のとき，「x 以下の最大の有理数」は存在しない．有理数の稠密性から，どんな有理数 $q<x$ に対しても，$q<q'<x$ となる別の有理数 q' が必ず存在するからである．□

演習 1.2.　(1) 写像 $f\colon X\to Y$ のことを $f=(f(1),f(2),f(3))$ のように組で表すことにすると，X から Y への写像は全部で次の 8 個ある:

$$f_1=(a,a,a),\ f_2=(a,a,b),\ f_3=(a,b,a),\ f_4=(a,b,b),$$
$$f_5=(b,a,a),\ f_6=(b,a,b),\ f_7=(b,b,a),\ f_8=(b,b,b).$$

(2) X から Y への写像は Y の元が $|X|$ 個並んだ順列と一対一に対応する．したがって，それらは全部で $|Y|^{|X|}$ 個ある．□

演習 2.1.　任意の $(x,y)\in E\times E$ について，$x=2m+1$, $y=2n+1$ と書けば，

$$f(x,y)=6x+8y=6(2m+1)+8(2n+1)=4(3m+4n+3)+2\in 2+4\mathbb{Z}$$

である．よって，$f(E\times E)\subseteq 2+4\mathbb{Z}$ である．任意の $z\in 2+4\mathbb{Z}$ を考えて，$z=2+4k$ と表す．k が奇数のときは，$(x,y)=(1,(k-1)/2)$ に対して $f(x,y)=6x+8y=6+4(k-1)=4k+2=z$ となる．k が偶数のときは，$(x,y)=(-1,(8+4k)/8)$ に対して $f(x,y)=6x+8y=-6+8+4k=2+4k=z$ である．よって，いずれにせよ $z\in\operatorname{img}f$ であり，$f(E\times E)\supseteq 2+4\mathbb{Z}$ も成り立つ．□

演習 2.2.　(1) の証明: 任意の $y\in f(A)$ はある $x\in A$ を用いて $y=f(x)$ と書ける．仮定から $A\subseteq A'$ なので，$x\in A'$ でもある．よって，$y=f(x)\in f(A')$ でもある．ゆえに，$f(A)\subseteq f(A')$ である．

(2) の証明: $A\subseteq A\cup A'$ なので，先に示した (1) から $f(A)\subseteq f(A\cup A')$ である．同様に，$f(A')\subseteq f(A\cup A')$ でもある．よって，$f(A)\cup f(A')\subseteq f(A\cup A')$ である．$y\in f(A\cup A')$ とすると，ある $x\in A\cup A'$ について $y=f(x)$ と書けるが，$x\in A$ ならば $y=f(x)\in f(A)$ であるし，$x\in A'$ ならば $y=f(x)\in f(A')$ だから，$y\in f(A)\cup f(A')$ である．よって，$f(A)\cup f(A')\supseteq f(A\cup A')$ も成り立つ．ゆえに，$f(A)\cup f(A')=f(A\cup A')$ である．

(3) で $f(A\cap A')\neq f(A)\cap f(A')$ となる具体的事例: 関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定める．$A=\{1\}$, $A'=\{-1\}$ に対して，$f(A)=f(A')=\{1\}$ だから，$f(A)\cap f(A')=\{1\}$ である．一方で，$A\cap A'=\emptyset$ なので，$f(A\cap A')=\emptyset$ である．□

演習 2.3.　$A=\bigcup_{i\in I}A_i$ とする．全ての i について $A\supseteq A_i$ だから，命題 2.6(1) から $f(A)\supseteq f(A_i)$ である．よって，$f(A)\supseteq\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ である．逆向きの包含を示す．$y\in f(A)$ として，$y=f(a)$ となる $a\in A$ を選ぶ．$a\in A$ なので，$a\in A_i$ となる $i\in I$ が存在して，$y=f(a)\in f(A_i)$ となる．ゆえに，$y\in\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ である．これで $f(A)\subseteq\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ も示されたので，$f(A)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ が成り立つ．□

演習 2.4.　(1) の反例: $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}_{\geq 0}=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geq 0\}$, $f(x)=|x|$, $A=\{1\}$ とおく．まず, $f(X\setminus A)\subseteq f(X)=Y$ は明らかである．任意の $y\in Y$ について, $-y\in X\setminus A$ かつ $f(-y)=y$ である．ゆえに, $f(X\setminus A)\supseteq Y$ でもあり, $f(X\setminus A)=Y$ が成り立つ．一方で, $f(A)=\{1\}$, $Y\setminus f(A)=Y\setminus\{1\}$ である．よって, $f(X\setminus A)\subseteq Y\setminus f(A)$ は成立しない．

(2) の反例: $X=Y=\mathbb{Z}$, $f(x)=2x$, $A=\mathbb{N}$ とおく．$1\in Y\setminus f(A)$ であるが, 一方でそもそも $1\notin f(X)$ だから, $1\notin f(X\setminus A)$ である．ゆえに, $f(X\setminus A)\supseteq Y\setminus f(A)$ は成立しない．

このように, (1) および (2) が必ずしも成立しないので, (3) も必ずしも成立しないことは明らかである．以上から, (1), (2), (3) のいずれも一般には成立しない．□

演習 2.5.　(1) $x\in f^{-1}(B\cap\operatorname{img}f)$ ならば, $f(x)\in B\cap\operatorname{img}f\subseteq B$ だから, $x\in f^{-1}(B)$ でもある．逆に, $x\in f^{-1}(B)$ であれば, $f(x)\in B$ であるし, かつ $f(x)\in\operatorname{img}f$ でもあるので, $f(x)\in B\cap\operatorname{img}f$, つまり $x\in f^{-1}(B\cap\operatorname{img}f)$ である．

(2) $B\cap\operatorname{img}f\neq\emptyset$ とすると, ある $f(x)\in\operatorname{img}f$ が B にも属していることになるが, その x は $f^{-1}(B)$ に属するから $f^{-1}(B)\neq\emptyset$ である．逆に $f^{-1}(B)\neq\emptyset$ ならば, それに属する任意の x について $f(x)\in B$ であるが, $f(x)\in\operatorname{img}f$ でもあるので, $f(x)\in B\cap\operatorname{img}f$, よって $B\cap\operatorname{img}f\neq\emptyset$ である．□

演習 2.6.　(1) の証明: $x\in f^{-1}(B)$ とすると, $f(x)\in B\subseteq B'$ なので $x\in f^{-1}(B')$ でもある．

(2) の証明: $B\subseteq B\cup B'$ なので, 上で示した (1) から $f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(B\cup B')$ である．$f^{-1}(B')\subseteq f^{-1}(B\cup B')$ でもあるので, 同様にして $f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')\subseteq f^{-1}(B\cup B')$ を得る．$x\in f^{-1}(B\cup B')$ とすると, $f(x)\in B\cup B'$ であるが, $f(x)\in B$ ならば $x\in f^{-1}(B)$ であるし, $f(x)\in B'$ ならば $x\in f^{-1}(B')$ なので, $x\in f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')$ である．ゆえに, $f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')\supseteq f^{-1}(B\cup B')$ でもある．

(3) の証明の続き: 残されていた $f^{-1}(B\cap B')\subseteq f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')$ を示せばよい．$B\cap B'\subseteq B$ であるから, 上で示した (1) から $f^{-1}(B\cap B')\subseteq f^{-1}(B)$ である．同じく $f^{-1}(B\cap B')\subseteq f^{-1}(B')$ も得られるので, $f^{-1}(B\cap B')\subseteq f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')$ である．□

演習 2.7.　まず $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ であることを示す．$B=\bigcup_{i\in I}B_i$ とおく．どの $i\in I$ についても $B\supseteq B_i$ だから, 命題 2.13(1) から $f^{-1}(B)\supseteq f^{-1}(B_i)$ である．よって, $f^{-1}(B)\supseteq\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ である．逆の包含を示そう．$x\in f^{-1}(B)$ とすると, $f(x)\in B$ なので, $f(x)\in B_i$ となる $i\in I$ が存在するが, それに対して $x\in f^{-1}(B_i)$ となるから, $x\in\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ である．ゆえに, $f^{-1}(B)\subseteq\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ でもあり, $f^{-1}(B)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ が成り立つ．

次に, $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ であることを証明する．$B=\bigcap_{i\in I}B_i$ とおく．どの $i\in I$ についても $B\subseteq B_i$ だから, 命題 2.13(1) から $f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(B_i)$ である．よって, $f^{-1}(B)\subseteq\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ である．逆の包含を示そう．$x\in\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ とすると, どの $i\in I$ についても $x\in f^{-1}(B_i)$, つまり $f(x)\in B_i$ となるので, $f(x)\in\bigcap_{i\in I}B_i=B$, つまり $x\in f^{-1}(B)$ である．これで $f^{-1}(B)\supseteq\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ も言えたので, $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$ が成り立つ．□

演習 2.8.　$x\in f^{-1}(Y\setminus B)$ とすると, $f(x)\in Y\setminus B$ である．$x\in f^{-1}(B)$ であれば $f(x)\in B$ となるが, これは $f(x)\in Y\setminus B$ であることに反するのであり得ない．よって, $x\notin f^{-1}(B)$, つまり $x\in X\setminus B$ である．したがって, $f^{-1}(Y\setminus B)\subseteq X\setminus f^{-1}(B)$ である．一方, $x\in X\setminus f^{-1}(B)$ とすると, $x\notin f^{-1}(B)$ なので $f(x)\notin B$, つまり $f(x)\in Y\setminus B$ および $x\in f^{-1}(Y\setminus B)$ が成り立つから, $f^{-1}(Y\setminus B)\supseteq X\setminus f^{-1}(B)$ でもある．以上から, $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$ である．□

演習 2.9. (1) $x \in A$ とすると, 像の定義から $f(x) \in f(A)$ なので, 逆像の定義から $x \in f^{-1}(f(A))$ である. よって, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ である.

$A = f^{-1}(f(A))$ とならない事例: $X = Y = \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $x \mapsto x^2$ とすると, $A = \{1\}$ に対して $f(A) = \{1\}$, そして $f^{-1}(f(A)) = \{-1, 1\} \supsetneq A$ となる.

(2) $y \in f(f^{-1}(B))$ とすると, 像の定義からある $x \in f^{-1}(B)$ に対して $y = f(x)$ となるが, $x \in f^{-1}(B)$ だから $y = f(x) \in B$ である. よって, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ である.

$f(f^{-1}(B)) = B$ とならない事例: $X = Y = \mathbb{Z}$, $f : X \to Y$, $x \mapsto 2x$ とするとき, $B = \{0, 1\}$ に対して $f^{-1}(B) = \{0\}$, したがって $f(f^{-1}(B)) = \{0\} \subsetneq B$ である. □

演習 2.10. (1) $f(x) \in f(A)$ であることから $x \in A$ を結論したところが間違いである. 像の定義によれば, $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ であるが, ここの推論ではこれの逆条件 $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$ を使っている. しかし, これは一般には成り立たない.

(2) $y = f(x)$ となる $x \in X$ を一つ選ぶ, としたところに問題がある. 一般的には, そのような x が存在する保証はない. (Y は像 $\operatorname{img} f = f(X)$ よりも真に大きいかもしれない.) □

演習 2.11. (i) 命題 2.14 について.

(a) (2)⇒(3) における $f(A \cap A') \supseteq f(A) \cap f(A')$ の証明を完成させよう. $y \in f(A) \cap f(A')$ とする. $y \in f(A)$ なので, $y = f(x)$ $(x \in A)$ と書ける. 同じく $y \in f(A')$ なので, $y = f(x')$ $(x' \in A')$ と書ける. (2) から, ある $B \subseteq Y$ について $A = f^{-1}(B)$ である. 演習 2.9(2) から $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ であり, $f(x') = y \in f(A) \subseteq B$ だから, $x' \in f^{-1}(B) = A$ であり, したがって $x' \in A \cap A'$ である. よって, $y = f(x') \in f(A \cap A')$ である. これで $f(A \cap A') \supseteq f(A) \cap f(A')$ が示された.

(b) (3)⇒(1) における $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ の証明を完成させよう. $x \in f^{-1}(f(A))$ とするとき, (3) から $f(x) \in f(A) \cap f(\{x\}) = f(A \cap \{x\})$ となるので, 特に $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ である. ($A \cap \{x\} \neq \emptyset = \emptyset$ ならば, 矛盾 $f(x) \in f(A \cap \{x\}) = \emptyset$ が出る.) つまり, $x \in A$ でなければならない. よって, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ である.

(ii) 命題 2.15 について. 十分性における $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ の証明を完成させる. $b \in B$ とする. 仮定から, ある $A \subseteq B$ について $B = f(A)$ なので, $b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在する. $f(a) = b \in B$ だから, 逆像の定義から $a \in f^{-1}(B)$ である. よって, $b = f(a) \in f(f^{-1}(B))$ である. これで $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ が示された. □

演習 2.12. (1) $f^{-1}(f(A)) = A$ と仮定する. $y \in f(X \setminus A)$ として, $y = f(x)$ となる $x \in X \setminus A$ を選ぶ. ここで $y \in f(A)$ でもあるとすると, $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(f(A)) = A$ となるが, これは $x \in X \setminus A$ であることに反するのであり得ない. よって, $y \notin f(A)$, つまり $y \in Y \setminus f(A)$ である. ゆえに, $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ である.

逆に, $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ を仮定する. $x \in f^{-1}(f(A))$ とすると, $f(x) \in f(A)$ なので, $f(x) \notin Y \setminus f(A)$ である. そして $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ だから, $f(x) \notin f(X \setminus A)$ でもある. よって, 特に $x \notin X \setminus A$, つまり $x \in A$ である. ゆえに, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ である. 一方で, 演習 2.9(1) から $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ でもあるから, $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ.

(2) $B = f(f^{-1}(B))$ ならば, ($f^{-1}(B) \subseteq X$ であることから) $B \subseteq f(X)$ でもあることは明らかである.

$B \subseteq f(X)$ と仮定する. 任意の $b \in B$ を考える. $b = f(x)$ を満たす $x \in X$ が存在するが, $b \in B$ なので $x \in f^{-1}(B)$ である. よって, $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ である. したがって, $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ である. 逆向きの包含 $B \supseteq f(f^{-1}(B))$ は演習 2.9(2) から必ず成り立つから, $B = f(f^{-1}(B))$ である. □

演習 2.13.　(1) A_i は f で飽和しているので, ある $B_i \subseteq Y$ を用いて $A_i = f^{-1}(B_i)$ と書ける．演習 2.7 から,

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right),$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$$

となるから, $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ は共に f で飽和している．

(2) B_i は f で飽和しているので, 演習 2.12(2) から $B_i \subseteq f(X)$ である．よって, $\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq f(X)$ でもあり, したがって $\bigcup_{i\in I} B_i$ は f で飽和している．さらに, 任意の添字 $j \in I$ を用いて $\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq B_j \subseteq f(X)$ となるから, $\bigcap_{i\in I} B_i$ も f で飽和している．

演習 3.1.　(1) $f(\{1,2\}) = 2 = f(\{2,3\})$ となるので, f は単射ではない．

(2) $f(3,2) = 3/2 = 6/4 = f(6,4)$ だから f は単射ではない．

(3) $f(x_1,x_2) = f(x_1',x_2')$ とする．第 1 成分から $x_1^2 + x_2^2 = x_1'^2 + x_2'^2$, 第 2 成分から $x_1^2 - x_2^2 = x_1'^2 - x_2'^2$ がそれぞれ得られるので, 両辺を加えて $2x_1^2 = 2x_1'^2$, つまり $x_1 = x_1'$ が得られる．ここから直ちに $x_2 = x_2'$ も得られるので, $(x_1,x_2) = (x_1',x_2')$ である．ゆえに, f は単射である．

(4) f の定義から, x が有理数ならば $f(x) = x$ も有理数であり, x が無理数ならば $f(x) = 1-x$ も無理数である．($1-x$ が有理数であれば, $x = 1-(1-x)$ も有理数であるはず.)

$x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ とする．x が有理数ならば, $f(x') = f(x) = x \in \mathbb{Q}$ となるので x' も有理数であり, $x = f(x') = x'$ となる．x が無理数ならば, $f(x') = f(x) = 1-x$ は無理数, したがって x' も無理数であり, $1-x' = f(x') = f(x) = 1-x$, よって $x = x'$ である．ゆえに, f は単射である．

(5) $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $A' = \{2\}$, $B' = \{1,2,3\}$ に対して, $(A,B) \neq (A',B')$ であるが, $f(A,B)$ と $f(A',B')$ はどちらも $(\{2\},\{1,2,3\})$ である．よって, f は単射ではない．　□

演習 3.2.　$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ は単射ではあるが全射ではない．また, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$$g(x) = \begin{cases} x/2 & (x \text{ は偶数}) \\ x & (x \text{ は奇数}) \end{cases}$$

は全射ではあるが単射ではない．　□

演習 3.3.　$f(x_1,x_2) = (0,0,1)$ を満たす $(x_1,x_2) \in X$ が存在すると仮定する．第 1 成分と第 2 成分からそれぞれ $x_1 + x_2 = 0$, $2x_1 - 3x_2 = 0$ となるので $(x_1,x_2) = (0,0)$ であるが, そうすると第 3 成分 $3x_1 + 2x_2 - 1 = 1$ が成立せず矛盾である．よって, $f(x_1,x_2) = (0,0,1)$ となる $(x_1,x_2) \in X$ は存在せず, f は全射ではない．

(2) 任意の $y \in Y$ について, n 次単位行列 E の $(1,1)$-成分を y に置き換えて得られる行列を E_y とすれば, $f(E_y) = \det E_y = y$ となる．よって, f は全射である．

(5) $y \in Y$ とする．$y = 0$ に対しては $f(\emptyset) = 0$ であり, $y > 0$ に対しては $f(\{1,2,\dots,y\}) = y$ である．よって, f は全射である．

(3) $f(A,B) = (\{1\},\emptyset)$ となる $A, B \in 2^{\mathbb{Z}}$ が存在するなら, 第 2 成分から $A \cup B = \emptyset$ となるので $A = B = \emptyset$ であるはずだが, そうすると第 1 成分 $A \cap B = \{1\}$ が成り立たず矛盾する．よって, $f(A,B) = (\{1\},\emptyset)$ となる $A, B \in 2^{\mathbb{Z}}$ は存在せず, f は全射ではない．　□

演習 3.4.　(1)⇒(2): 任意の $x \in X$ について, $f(x) \in K$ であることから, (1) から $f(f(x)) = f(x)$ である．また, どの $x \in K$ についても $f(x) = x$ となるから, f は全射である．

(2)⇒(1): $x \in K$ とする．f は全射だから, $x = f(a)$ を満たす $a \in X$ が存在する．そして, $x = f(a) = f(f(a)) = f(x)$ である． □

演習 3.5.　(1)⇒(2): f が全射であると仮定すると, $f(X) = Y$ なので, Y の全ての部分集合は $f(X)$ に含まれている．よって, 演習 2.12(2) からそれは f の下で飽和している．

(2)⇒(3): $B, B' \subseteq Y$, $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$ と仮定する．像の単調性 (→命題 2.6(1)) から $f(f^{-1}(B)) \subseteq f(f^{-1}(B'))$ であるが, 仮定から B, B' は f の下で飽和しているので, $f(f^{-1}(B)) = B$, $f(f^{-1}(B')) = B'$ であり, したがって $B \subseteq B'$ が成り立つ．

(3)⇒(1): $f^{-1}(Y) = X = f^{-1}(f(X))$ なので, $B = Y$ と $B' = f(X)$ に対して (3) を使えば $Y \subseteq f(X)$ であること, つまり $Y = f(X)$ であることがわかる．よって, f は全射である． □

演習 3.6.　(1) f の定義から, $n > 0$ であれば $f(n)$ は偶数であり, $n \leq 0$ であれば $f(n)$ は奇数であることに注意する．$m, n \in X$, $f(m) = f(n)$ とする．$m > 0$ のとき, $f(n) = f(m) = 2m$ は偶数だから $n > 0$ であり, $2m = f(n) = 2n$, よって $m = n$ である．$m \leq 0$ のとき, $f(n) = f(m) = 1 - 2m$ は奇数だから $n \leq 0$ であり, $1 - 2m = f(n) = 1 - 2n$, よって $m = n$ である．ゆえに, f は単射である．任意の $y \in Y$ について, y が偶数ならば $f(y/2) = y$ であり, y が奇数であれば $f(-(y-1)/2) = 1 + 2(y-1)/2 = y$ となる．よって, f は全射でもある．

(2) 演習 3.1(4) から f は単射である．任意の $y \in Y$ について, y が有理数ならば $f(y) = y$ であるし, y が無理数ならば $1 - y$ も無理数であり, $f(y) = 1 - (1 - y) = y$ となる．よって, f は全射でもある．

(3) $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ とする．$x_1 \in S$, $x_2 \notin S$ とすると, $x_2 = f(x_2) = f(x_1) = x_1/2$ であり, $x_2 \in S$ となって矛盾である．よって, $x_1 \in S$ であれば必ず $x_2 \in S$ でもあり, $x_2/2 = f(x_2) = f(x_1) = x_1/2$, よって $x_1 = x_2$ となる．同じく, $x_1 \notin S$ であれば必ず $x_2 \notin S$ でもあり, $x_2 = f(x_2) = f(x_1) = x_1$ となる．ゆえに, f は単射である．$y \in Y$ のとき, $y = 1/2^n$ $(n \geq 1)$ の形であれば $x = 1/2^{n-1} \in S$ に対して $f(x) = x/2 = y$ となる．そうでなければ, $x = y \in X$ に対して $f(x) = y$ となる．ゆえに, f は全射である． □

演習 4.1.　$g \circ f$ が全射であることを示すには, 任意の $z \in X$ に応じて, $z = g \circ f(x)$ となる $x \in X$ が存在することを言えばよい．g は全射なので, $z = g(y)$ となる $y \in Y$ が存在する．f も全射なので, その y に対して, $y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在する．すると, $z = g(y) = g \circ f(x)$ となる． □

演習 4.2.　(1) まず $(g \circ f)(A) \subseteq g(f(A))$ を示す．それには, 任意の $a \in A$ について $g \circ f(a) \in g(f(A))$ であることを言えばよい．$a \in A$ だから, $f(a) \in f(A)$ である．よって, $g \circ f(a) = g(f(a)) \in g(f(A))$ である．

次に $(g \circ f)(A) \supseteq g(f(A))$ を示す．$g(f(A))$ の任意の元 z は, ある $y \in f(A)$ を用いて $z = g(y)$ と書ける．$y \in f(A)$ なので, ある $x \in A$ を用いて $y = f(x)$ と書ける．ここで $z = g(y) = g \circ f(x)$, $x \in A$ だから, $z \in (g \circ f)(A)$ である．

(2) まず $(g \circ f)^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$ を示す．$x \in (g \circ f)^{-1}(C)$ とすると, $g(f(x)) = g \circ f(x) \in C$ なので, $f(x) \in g^{-1}(C)$, したがって $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$ である．よって, $(g \circ f)^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$ である．

次に $(g \circ f)^{-1}(C) \supseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$ を示す．$x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$ とすると, $f(x) \in g^{-1}(C)$ であり, したがって $g \circ f(x) = g(f(x)) \in C$, つまり $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$ である．よって, $(g \circ f)^{-1}(C) \supseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$ で

ある. □

演習 4.3. (1) f が単射でないならば, 相異なる $x_1, x_2 \in X$ で $f(x_1) = f(x_2)$ となるものが存在するが, それらに対しては $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ でもあるので, $g \circ f$ は単射ではない. これの対偶から, $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

(2) $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & (x \text{ は偶数}) \\ x & (x \text{ は奇数}) \end{cases}$$

とおくと, 任意の $x \in \mathbb{Z}$ について $g \circ f(x) = g(2x) = (2x)/2 = x$ であるから, $g \circ f$ は恒等写像であり, 明らかに単射である. 一方, $g(2) = 1 = g(1)$ だから, g は単射ではない. □

演習 4.4. (1) $z \in Z$ とする. $g \circ f$ は全射なので, $g \circ f(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する. $y = f(x) \in Y$ に対して $z = g \circ f(x) = g(y)$ となる. ゆえに, g は全射である.

(2) 演習 4.3(2) の解答例で用いた $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ について, $g \circ f$ は恒等写像だから全射であるが, $f(x) = 1$ となる x が存在しないので f は全射ではない. □

演習 4.5. (1) $X = Y = Z = \{1, 2\}$, $f = \epsilon$, $g(1) = g(2) = 1$ とおく. f は単射であるが, $g \circ f(1) = 1 = g \circ f(2)$ なので $g \circ f$ は単射ではない.

(2) $X = Y = Z = \{1, 2\}$, $g = \epsilon$, $f(1) = f(2) = 1$ とおけば, g は単射であるが, $g \circ f(X) = \{1\}$ だから $g \circ f$ は全射ではない. □

演習 4.6. (I) f を全射と仮定して, $u, v : Y \to Z$, $u \circ f = v \circ f$ ならば $u = v$ であることを示す. 任意の $y \in Y$ について, (f の全射性を用いて) $y = f(x)$ となる $x \in X$ を一つ選ぶと, $u(y) = u(f(x)) = u \circ f(x) = v \circ f(x) = v(f(x)) = v(y)$ となる. よって, $u = v$ である.

(II) f が全射ではないと仮定して, $\operatorname{img} f$ に属さない任意の元 $y_0 \in Y$ を考える. $Z = \{0, 1\}$ として, 写像 $u, v : Y \to Z$ を次のように定義する. (i) 全ての $y \in Y$ について $u(y) = 0$ とする. (ii) y_0 以外の $y \in Y$ については $v(y) = 0$ として, $v(y_0) = 1$ とする. 任意の $x \in X$ について, $f(x) \in \operatorname{img} f$ なので $f(x) \neq y_0$ であり, したがって $vf(x) = 0$ である. 一方で, $uf(x) = 0$ でもある. よって, $uf = vf$ である. しかし, $u(y_0) = 0 \neq 1 = v(y_0)$ なので $u \neq v$ である.

演習 4.7. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ とし, 各 $1 \leq i \leq m$ に対して $y_i = f(x_i)$ とおく. そして, $y_1, \ldots, y_m$ 以外の Y の元を $z_1, \ldots, z_{n-m}$ と書いておく. ($m = n$ のときには, これらの元 $z_1, \ldots, z_{n-m}$ は存在しない.) $\tilde{f} : Y \to X$ が f の左逆写像であるとき, $1 \leq i \leq m$ に対しては $\tilde{f}(y_i) = \tilde{f}(f(x_i)) = x_i$ である. そして, $\tilde{f}(z_1), \ldots, \tilde{f}(z_{n-m})$ らの値は X の元であればそれぞれ何でもよい. したがって, f の左逆写像の総数は m^{n-m} である.

演習 4.8. 写像の合成に関する結合則 (命題 4.4) を用いて

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1}(g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \epsilon_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \epsilon_X, \\
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \epsilon_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \epsilon_Z
\end{aligned}$$

を得る. ゆえに, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である. □

演習 4.9. (1)「演習 4.8 から, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である」と結論したところが誤りである．演習 4.8 では f, g がそれぞれ全単射であることが前提であるが, ここでは f, g は全単射であることは仮定されていない．

(2) 演習 4.3(2) の解答例で挙げた例を考えればよい．$g \circ f$ は恒等写像であるが, $f \circ g$ はそうではない． □

演習 4.10. 恒等置換 ϵ_X は明らかに全ての置換 τ について $\epsilon_X \circ \tau = \tau = \tau \circ \epsilon_X$ を満たしているが, この性質を持つ置換は恒等置換だけであることを示す．そのためには, ϵ_X 以外の任意の置換 σ に応じて, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ となる置換 τ が必ず存在することを示せばよい．$\sigma \neq \epsilon_X$ なので, $\sigma(x) \neq x$ となる $x \in X$ が存在する．$|X| \geq 3$ なので, X は x および $y = \sigma(x)$ 以外の元 z を持っている．τ を x, z を交換してそれ以外の元を全て固定する置換とする．$x \neq z$ かつ σ は単射なので, $\sigma(z) \neq \sigma(x) = y$ である．そして τ は単射だから, $\tau\sigma(z) \neq \tau(y) = y$ である．一方で $\sigma \circ \tau(z) = \sigma(x) = y$ であるから, $\sigma \circ \tau(z) \neq \tau \circ \sigma(z)$ であり, したがって $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ である． □

演習 5.1. $S = X_i$ とおく．$\phi_i = \epsilon_{X_i}$ とおき, i 以外の $j \in I$ については ϕ_j を S から X_j への任意の写像とする．(仮定から $S = X_i$ も X_j も空集合ではないので, S から X_j への写像は必ず存在する.) これらの写像に対して, 写像 $\phi : S \to A$ が唯一つ存在して, i も含めて全ての $j \in I$ について $\rho_j \circ \phi = \phi_j$ が成り立つ．特に, $\rho_i \circ \phi = \phi_i = \epsilon_{X_i}$ であるが, これは ρ_i は ϕ を右逆写像に持つ全射であることを示している (→定理 4.8(2)). □

演習 5.2. $X_i = \emptyset$ であれば, ε_i は空写像であるが, これは空虚な意味で単射である．そこで, 以下 $X_i \neq \emptyset$ であるとする．$S = X_i$ とおく．$\phi_i = \epsilon_{X_i}$ とおき, i 以外の $j \in I$ については ϕ_j は X_j から S への写像であれば何でもいいものとする．($S = X_i \neq \emptyset$ なので, X_j が空か否かに関わらず X_j から S への写像は必ず存在する.) これらの写像に対して, 写像 $\phi : A \to S$ が唯一つ存在して, i も含めて全ての $j \in I$ に対して $\phi \circ \varepsilon_j = \phi_j$ が成り立つ．特に, $\phi \circ \varepsilon_i = \phi_i = \epsilon_{X_i}$ であるが, これは ε_i が ϕ を左逆写像とする単射であることを示している (→定理 4.8(1)). □

演習 5.3. S を任意の集合, $\{\phi_i : S \to X_i\}_{i \in I}$ を任意の写像族とする．命題 5.9 から, 写像 $\tilde{\phi} : U \to S$ で全ての $i \in I$ について $\tilde{\phi} \circ \sigma_i = \phi_i$ を満たすものが唯一つ存在する．$\phi = \tilde{\phi} \circ f^{-1} : A \to S$ とおくと, 全ての $i \in I$ について

$$\phi \circ \varepsilon_i = \tilde{\phi} \circ f^{-1} \circ f \circ \sigma_i = \tilde{\phi} \circ \sigma_i = \phi_i$$

が成り立つ．これで ϕ の存在は示された．その一意性を示そう．写像 $\phi' : A \to S$ が全ての $i \in I$ について $\phi' \circ \varepsilon_i = \phi_i$ を満たしているとする．$\tilde{\phi}' = \phi' \circ f : U \to S$ とおくと, 全ての $i \in I$ について

$$\tilde{\phi}' \circ \sigma_i = \phi' \circ f \circ \sigma_i = \phi' \circ \varepsilon_i = \phi_i$$

となるが, この条件を満たす写像 $U \to S$ は $\tilde{\phi}$ しかないので, $\tilde{\phi}' = \tilde{\phi}$ である．この両辺に f^{-1} を右から合成すれば $\phi' = \phi$ が得られる．これで ϕ の一意性も示された．以上から, A は ε_i らを埋め込みとして集合 X_i らの抽象直和である． □

演習 6.1. $\{A_i\}_{i \in I}$ を空でない集合 A_i らで構成される集合族とする．(I は空集合ではないとしておく.) 集合 A_i らの直和集合 (→第 1 巻『集合と論理』例 4.20)

$$U = \{(i, x) \mid x \in A_i\}$$

を考える．写像 $f : U \to I$ を $f(i,x) = i$ で定める．任意の $i \in I$ を考える．仮定から A_i は空集合ではないので，A_i の任意の元 x を用いて，$(i,x) \in U$ かつ $f(i,x) = i$ が得られる．よって，f は全射である．だから，定理 4.8(2) から f の右逆写像 $\tilde{f} : I \to U$ が存在する．

任意の $i \in I$ を考える．$\tilde{f}(i) = (j,x)$ とすると，$i = f \circ \tilde{f}(i) = f(j,x) = j$ だから，$\tilde{f}(i) = (i,x)$ であるが，これは U の元なので $x \in A_i$ である．この x を A_i から選ばれた代表元と見なせば選択関数が得られる．つまり，

$$\phi(i) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(i) \text{ の第 2 成分}$$

と定義すれば，ϕ が選択関数になっている．よって，選択公理が成立する． □

