数学の基礎 1 集合論・初級編 5

集合の濃度と順序数

東北大学データ駆動科学・AI 教育研究センター

最終更新: 2025 年 9 月 24 日

この巻で学習することの概要

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ は全て無限個の元から成る無限集合であるが, 実はその '無限' の度合いは $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ までは全て同じであり, $\mathbb{R}$ はそれらに比べてより無限度が高い集合である．本巻では, 無限集合にもいろいろと無限の度合いに違いがあること, 集合どうしの大きさを比較するための基本的な考え方などについて学んでいく．無限集合の中でも, 特に $\mathbb{N}$ と同じ大きさを持つものは可算無限集合と呼ばれ, 数学の中で特別な位置を占めることが珍しくない．本巻では, 可算集合とともに, $\mathbb{R}$ と同じ大きさを持つ無限集合について特に詳しく学習する．また, 本巻では, 自然数が持つ「物の順番を数える」という機能を一般化した数の体系である順序数についても簡単に触れておく．

Keywords 濃度, 対等関係, 濃度の比較, カントールの定理, 可算集合と非可算集合, 濃度の比較定理, 連続体仮説, Dedekind 無限, 順序数

予備知識 第 1 巻『集合と論理』から第 4 巻『順序関係』の内容を理解していること．特に, 第 4 節では整列集合の知識が必須である．

Contents

1 有限集合と数え上げ

無限集合の話に入る前の前座として, 有限集合を題材にして, 集合の元の個数を数え上げることについての基本的な考え方について触れておこう. この節では, 特に断らない限り, 空でない**有限集合**のみを考える.

1.1 鳩の巣原理

まずは, 次の簡単な命題から始めよう. いずれの主張も直観的には明らかである.

命題 1.1. X, Y を空でない有限集合とするとき,

(1) X から Y への単射が存在するためには, $|X| \leq |Y|$ であることが必要十分である.
(2) X から Y への全射が存在するためには, $|X| \geq |Y|$ であることが必要十分である.
(3) X から Y への全単射が存在するためには, $|X| = |Y|$ であることが必要十分である.

証明. 以下, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ $(m = |X|,\ n = |Y|)$ とする.

(1) $|X| \leq |Y|$, つまり $m \leq n$ のとき, 各 $1 \leq i \leq m$ について, $f(x_i) = y_i$ とおけば, f は X から Y への単射である.

逆に, 単射 $f : X \to Y$ が存在すると仮定する. $\mathrm{img}\, f = \{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$ は Y の部分集合である. f は単射なので, $f(x_1), \dots, f(x_m)$ は全て相異なる元であり, したがって $|\mathrm{img}\, f| = m$ である. よって, Y は大きさが m の部分集合を持っていることになる. ゆえに, $|Y| \geq m = |X|$ である.

(2) 全射 $X \to Y$ が存在するならば, 第 2 巻『写像』系 4.9 から単射 $Y \to X$ があるので, (1) から $|X| \geq |Y|$ である. 逆に, $|X| \geq |Y|$ ならば, (1) から単射 $Y \to X$ があるので, 第 2 巻『写像』系 4.9 から全射 $X \to Y$ が存在する.

(3) これは (1) と (2) から明らかである. □

命題 1.1(1) はよく次の形式で利用される:

> $|X| > |Y|$ ならば, X から Y へのどの写像 $f : X \to Y$ も単射ではない.
> つまり, $f(x) = f(x')$ となる $x \neq x'$ $(x, x' \in X)$ が必ず存在する.

これは**鳩の巣原理**または **Dirichlet の箱入れ原理**などと呼ばれている論法である．その中身は「鳩が 6 羽居るのに巣箱が 5 つしか無いとき, どこかの巣箱には 2 羽以上の鳩が同居している」という, どう見ても当たり前のことを言っているだけである.[*1] しかし, これだけ単純なことが意外な力を発揮することが多々ある．簡単な例をいくつか眺めてみよう．

♦ **例 1.2** 2 次元座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上に 5 個の格子点を任意に選ぶ．このとき, それらのうちの 2 個の格子点が存在して, それらの中点もまた格子点となることを示そう．ここで**格子点**とは, x 座標と y 座標が共に整数である点のことを言う．ポイントは, どの格子点 (x, y) も次の 4 つのタイプのうちのどれか一つに分類されるということである．

- タイプ 1: x, y はどちらも偶数である．
- タイプ 2: x, y はどちらも奇数である．
- タイプ 3: x は奇数で y は偶数である．
- タイプ 4: x は偶数で y は奇数である．

5 個の格子点が与えられたとき, 同じタイプに分類される異なる 2 点が必ず存在する．(5 個の格子点が鳩, 4 つのタイプが鳩の巣である.) (x, y), (x', y') を同じタイプの相異なる格子点とすると, x と x' の偶奇は同じであり, y と y' の偶奇は同じである．よって $x+x'$, $y+y'$ は偶数であり, 中点 $((x+x')/2, (y+y')/2)$ は格子点である． □

♦ **例 1.3** (Erdős-Szekeres) 長さが $n \geq (r-1)(s-1)+1$ の任意の有限実数列 $x_1, \dots, x_n$ は, 長さ r 以上の単調増加な部分列か, または長さ s 以上の単調減少な部分列を含んでいる．一見すると掴みどころがない主張であるが, これも次のようにして鳩の巣原理的な発想で意外なほどあっさりと証明できる．

証明は対偶証明法による．$x_1, \dots, x_n$ が長さ s 以上の単調減少な部分列および長さ r 以上の単調増加な部分列を全く含まないならば, $n \leq (r-1)(s-1)$ であることを示せばよい．

各々の i について, x_i で終わる単調増加な部分列の中で最も長いものの長さを k_i とし, x_i で終わる単調減少な部分列の中で最も長いものの長さを k_i' とする．仮定から, どの i についても $1 \leq k_i \leq r-1$, $1 \leq k_i' \leq s-1$ である．任意の番号組 (i, j) $(1 \leq i < j \leq n)$ について,

(1) $x_i \leq x_j$ のとき: x_i で終わる長さ k_i の単調増加部分列の最後に x_j を追加すると, x_j で終わる長さ k_i+1 の単調増加部分列が生じる．よって, $k_j \geq k_i+1$ である．
(2) $x_i > x_j$ のとき: x_i で終わる長さ k_i' の単調減少部分列の最後に x_j を追加すれば, x_j で終わる長さ $k_i'+1$ の単調減少部分列が生じる．よって, $k_j' \geq k_i'+1$ である．

ゆえに, いずれにせよ $k_i < k_j$ または $k_i' < k_j'$ が成立する．すなわち, $i \neq j$ である限り, $(k_i, k_i') = (k_j, k_j')$ とはなり得ない．言い換えれば, 写像

$$\{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, r-1\} \times \{1, 2, \dots, s-1\}, \quad i \mapsto (k_i, k_i')$$

は単射である．よって, 命題 1.1(1) から $n \leq (r-1)(s-1)$ である． □

♦ **例 1.4** 分数 a/b (a, b は自然数) を小数で表すと有限小数になる (例: $3/8 = 0.375$) か, あるいは循環する無限小数になる (例: $23/28 = 0.82\dot{1}4285\dot{7}$, ドットの範囲が循環する) かのいずれかである．これはよく知られた事実であるが, この事実も鳩の巣原理を用いて次のように説明することができる．

[*1] ただし, 鳩の巣原理だけでは, どの箱にどの 2 羽が同居しているのかということまでは特定されない．

(1) 準備として, まず $345/999 = 0.345345\cdots$ のように $c/(10^k-1)$ $(k \geq 1,\ 1 \leq c < 10^k-1)$ という形の分数は分子の c の部分が循環することに注意しておこう. これは,

$$\frac{c}{10^k-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{10^{ki}}$$

であることによる. (例えば, 345/999 は初項が 345/1000, 公比が 1/1000 の等比級数の和であるが, これが $345/999 = 0.\dot{3}4\dot{5}$ という小数表示の意味である.)

(2) $n \geq 0$ に対して, $10^n a$ を b で割った商を q_n, 余りを r_n とすると, $10^n a = bq_n + r_n$, $0 \leq r_n < b$ である. 余り r_n の値は 0 から $b-1$ までの b 通りであるが, これが「鳩の巣」である. そして, $0, 1, \ldots, b$ を「鳩」と見なして鳩の巣原理を用いれば, 相異なる $m, n \in \{0, 1, \ldots, b\}$ で $r_m = r_n$ となるものが存在することが分かる. (一般性を失わず, $m < n$ と仮定しておく.) $10^m a = bq_m + r_m$, $10^n a = bq_n + r_n$, $r_m = r_n$ だから, $(10^n - 10^m)a = b(q_n - q_m)$ である. $q = q_n - q_m$, $k = n - m > 0$ とおくと,

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{10^n - 10^m} = \frac{q}{10^m(10^k-1)}$$

となる. q を $10^k - 1$ で割った商を u, 余りを c とすると, $q = (10^k-1)u + c$, $0 \leq c < 10^k - 1$ かつ

$$\frac{a}{b} = \frac{(10^k-1)u + c}{10^m(10^k-1)} = \frac{u}{10^m} + \frac{c}{10^m(10^k-1)}$$

である. ここで, $u/10^m$ は小数で表せば有限小数である. 第 2 項 $c/10^m(10^k-1)$ は $c = 0$ であれば 0 であるが, そうでなければ循環小数である. 実際, (1) から $c/(10^k-1)$ が c の部分が循環する循環小数なので, $c/10^m(10^k-1)$ も循環小数である.[*2] したがって, a/b は $c = 0$ であれば有限小数, そうでなければ循環小数である. □

これらの例のように, 何を「鳩」と見て何を「鳩の巣」と見るかで, 鳩の巣原理は様々なところで応用できる. 鳩の巣原理の親戚のような命題で, 単純でありながら意外と役に立つものは他にもある. 例えば,

- n 個の集合があり, それらの和集合の大きさが m であるとき, それらの集合のうち m/n 個以上の要素を持つ集合が必ず存在する. 例えば, 5 人がそれぞれケーキを持ち寄って合計 27 個になったとき, 誰かが 6 個以上持ってきているはずである.
- 有限個の集合があり, それらの和集合が無限集合であれば, それらのうちの少なくとも一つは無限集合である.
- X を有限集合, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を X の元から成る無限列とするとき, この列の中に無限回繰り返し現れる元が存在する.

♦ 例 1.5　X を大きさが $n(\geq 1)$ の有限集合とし, $f : X \to X$ を写像とする. 写像の列 $f, f^2, f^3, \ldots$ を考える. ここで, f^k は f を k 個並べた合成写像を表している. X から X 自身への写像は全部で n^n 個であり, したがって $f, f^2, f^3, \ldots$ が全て相異なるということはあり得ない. よって, $f^i = f^j$ となる相異なる自然数 $i < j$ が存在する. 任意の $x \in X$ を選び, $a = f^i(x)$ とおくと, $a = f^i(x) = f^j(x) = f^{j-i}f^i(x) = f^{j-i}(a)$ となる. つまり, a は写像 f^{j-i} の不動点 (f^{j-i} による変換を受けても動かない点のこと) である. このように, X が有限集合であれば, どんな写像 $f : X \to X$ についても, それのある冪乗 f^k は必ず不動点を

[*2] 例えば $m = 2$, $k = 3$, $c = 304$ のとき, $c/(10^k-1) = 0.304304\cdots$ であり, $c/10^m(10^k-1)$ はそれを 2 桁後ろにずらした循環小数 $0.00304304\cdots$ である.

持っている．これは X が無限集合である場合は通用しない．例えば，$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto x+1$ のとき，任意の自然数 k について $f^k(x)=x+k$ であり，これは不動点を持たない． □

♦ **例 1.6**　上の例を続けよう．$f:X\to X$ を特に全単射 (置換) として，上の例と同じように，$f^i=f^j$ となる相異なる自然数 $i<j$ を見つける．f は全単射なので f^i も全単射であり，したがって $f^i=f^j$ の両辺に f^i の逆写像を合成すれば $f^{j-i}=\epsilon_X$ が得られる．つまり，f は何回か合成すれば必ず恒等置換になる．

この結論は X が無限集合のときには一般に通用しない．例えば，$\mathbb{Z}$ 上の置換 $\sigma(x)=x+1$ については，どの自然数 k についても $\sigma^k(x)=x+k\neq x$ であり，決して $\sigma^k=\epsilon_{\mathbb{Z}}$ とはならない． □

♦ **例 1.7**　$\mathbb{R}^*$ を 0 以外の実数の全体とする．X を $\mathbb{R}^*$ の空でない有限部分集合で乗法に関して閉じているもの，つまり $x,y\in X\Rightarrow xy\in X$ であるものとする．このような部分集合 X を全て特定しよう．

$x\in X$ とする．X は乗法で閉じているので，$x,x^2,x^3,\dots$ は全て X に属する．x^n が n に応じて全て異なるならば，$\{x,x^2,x^3,\dots\}$ は X の無限部分集合であるが，X は有限集合なのでそれはあり得ない．よって，相異なる自然数 $m<n$ で $x^m=x^n$ となるものが必ず存在する．$x^m=x^n$ の両辺に $1/x^m$ を掛けると，$x^{n-m}=1$ となる．($x\in X$, $X\subseteq\mathbb{R}^*$ なので，$x\neq 0$ であることにも注意.) よって，$x=1$ または $x=-1$ のいずれかである．ゆえに，X の元であり得るのは 1, -1 しかなく，$X=\{1\}$, $X=\{-1\}$, $X=\{1,-1\}$ のどれかである．ここで $X=\{-1\}$ は乗法に関して閉じていないので除外される．よって，$X=\{1\}$ または $X=\{1,-1\}$ である． □

1.2　集合の分割と包除原理

突然だが，まずは次の演習問題を自分で考えてみてほしい．

▶ **演習 1.1**　任意の有限集合 A, B, C について，次の等式を証明せよ．

(1) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.
(2) $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

この演習で示した等式はさらに次のように一般化できる．$\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ $(n\geq 2)$ を有限集合から成る集合族とする．添字集合 $N=\{1,2,\dots,n\}$ の任意の部分集合 I に対して，

$$A_I\overset{\text{def}}{=}\bigcap_{i\in I}A_i$$

とおく．例えば $I=\{1,2,5\}$ ならば $A_I=A_1\cap A_2\cap A_5$ である．$I=\emptyset$ に対しては特別に

$$A_\emptyset=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \tag{1}$$

と定める．この約束は一見奇妙だが，次のように考えれば論理的には自然な約束事であることが見えてくる．まず最初に，ここではどの $A_1,\dots,A_n$ にも属さない元は相手にしておらず，x としては，$A_1,\dots,A_n$ のうちのどれかには属している元 (つまり，和集合 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ に属する元) だけを考えていることに注意しておこう．さて，そのような x に対して，$x\in A_\emptyset$ であるためには，どの $i\in N$ に対しても

$$i\in\emptyset\Rightarrow x\in A_i \tag{2}$$

が成り立っていなければならない．ここで仮定 $i \in \emptyset$ は偽なので，式 (2) は**空虚に真**である．つまり，どの x についても式 (2) は必ず成立するので，x は $A_\emptyset$ に属する資格がある．このようなわけで，式 (1) のように定義するのが論理的には自然である．

包除原理

定理 1.8. $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ および I を上記の通りとするとき，

$$\sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I| = 0 \tag{3}$$

である．ここで，左辺は N の全ての部分集合 I に渡る和を表している．

証明. この定理は集合の個数 n に関する数学的帰納法を用いて証明することもできるが，ここではそれとは別に，多項式の展開を利用した証明を紹介しよう．$A = A_\emptyset = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ とする．任意の $a \in A$ および $I \subseteq N$ について，

$$\chi(a, I) = \begin{cases} 1 & (a \in A_I \text{ のとき}) \\ 0 & (a \notin A_I \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．この定義から，任意の $I \subseteq N$, $a \in A$ に対して

$$|A_I| = \sum_{a \in A} \chi(a, I) \tag{4}$$

$$\prod_{i \in I} \chi(a, i) = \chi(a, I) \tag{5}$$

である．さて，ここで n 個の変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する多項式

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \tag{6}$$

を考える．任意の $a \in A$ に対して，

$$\begin{aligned} p(a) &\overset{\text{def}}{=} p(-\chi(a, 1), -\chi(a, 2), \dots, -\chi(a, n)) \\ &= (1 - \chi(a, 1))(1 - \chi(a, 2)) \cdots (1 - \chi(a, n)) \end{aligned}$$

とおく．ただし，$\chi(a, i)$ は $\chi(a, \{i\})$ の略記である．$a \in A$ だから，a はある A_i に属しているが，その i に対する項 $1 - \chi(a, i)$ は 0 であり，したがって $p(a) = 0$ である．式 (6) を分配法則を用いて展開すれば，

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I \subseteq N} x_I$$

となる．ここで，$x_I = \prod_{i \in I} x_i$ と置いた．(例えば，$I = \{1, 2, 5\}$ ならば，$x_I = x_1 x_2 x_5$ である．$I = \emptyset$ のときには，$x_I = 1$ と考える．) ゆえに，

$$\begin{aligned} 0 &= p(a) \\ &= p(-\chi(a, 1), \dots, -\chi(a, n)) \\ &= \sum_{I \subseteq N} \prod_{i \in I} (-\chi(a, i)) \\ &= \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} \chi(a, i) \\ &= \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} \chi(a, I) \end{aligned}$$

となる．ただし，最後の等号は式 (5) による．これは全ての $a \in A$ について成り立つので，この式を全ての $a \in A$ に渡って加え合わせれば，

$$0 = \sum_{a \in A} \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} \chi(a, I) = \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} \sum_{a \in A} \chi(a, I) = \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I|$$

が得られる．最後の等号は式 (4) による． □

式 (3) は，$I = \emptyset$ に対する項のみを移動させて

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = -\sum_{\emptyset \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I|$$

という形でよく利用される．$N = \{1, 2\}$ のとき，この式は

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

となるが，これが演習 1.1(1) で示した等式である．同じく，$N = \{1, 2, 3\}$ のときは

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

であり，演習 1.1(2) で示した等式が得られる．

♦ **例 1.9** (Euler の ϕ-関数)　自然数 n に対して，$A = \{1, 2, \dots, n\}$ の中で n と互いに素である自然数の総数を $\phi(n)$ で表す．この ϕ は **Euler の ϕ-関数**と呼ばれる数論的関数であり (→第 3 巻『同値関係』第 3.3 項)，整数論だけではなく，暗号理論など整数論の応用分野にも登場する基本的な関数である．例えば，$\{1, 2, \dots, 15\}$ の中で 15 と互いに素な数は $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ だから，$\phi(15) = 8$ である．p が素数ならば $\phi(p) = p - 1$ であり，もう少し一般的に $\phi(p^k) = p^k - p^k/p = p^k - p^{k-1}$ $(k \geq 1)$ である．

n の素因数分解を $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ とする．ここで，$\{p_1, \dots, p_k\}$ は n の素因数の全体，$e_1, \dots, e_k \geq 1$ である．$i = 1, 2, \dots, k$ に対して，A の中に含まれる p_i の倍数の全体を A_i で表すと，包除原理から

$$\sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I| = 0$$

である．ここで，$\sum_{I \subseteq N}$ は添字集合 $N = \{1, 2, \dots, k\}$ の全ての部分集合 I に渡る和であり，$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ である．ただし，$I = \emptyset$ に対しては $A_\emptyset = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ である．$I = \emptyset$ に対する項のみを分けて整理すれば

$$|A_\emptyset| = -\sum_{\emptyset \subsetneq I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I|$$

となるが，$A_\emptyset$ は A の中で n と互いに素でない数の全体だから，A の中で n と互いに素である数の総数 $\phi(n)$ は

$$\phi(n) = n - |A_\emptyset| = n + \sum_{\emptyset \subsetneq I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I|$$

である．空でない各々の I に対して，$p_I = \prod_{i \in I} p_i$ とおくと，A_I は A に含まれる p_I の倍数の全体であり，$|A_I| = n/p_I$ である．よって，

$$\phi(n) = n + \sum_{\emptyset \subsetneq I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I| = n + n \sum_{\emptyset \subsetneq I \subseteq N} (-1)^{|I|} \frac{1}{p_I} = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

である．最後の等号はやや唐突だが，積 $\prod_{i=1}^{k}(1-1/p_i)$ を分配法則で展開すれば和 $\sum_{I\subseteq N}(-1)^{|I|}1/p_I$ になることを見ればわかる．この表示式から，m, n が互いに素であれば (両者に共通する素因数はないので) $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$ であることも導かれる．よって，$n(\geq 3)$ が素因数分解 $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ を持つならば，

$$\phi(n)=\prod_{i=1}^{k}\phi\left(p_i^{e_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(p_i^{e_i}-p_i^{e_i-1}\right)$$

である．□

♦ **例 1.10**　X, Y をそれぞれ m 個, n 個の元から成る有限集合とするとき，X から Y への単射は全部で $n!/(n-m)!$ 個ある (→第 2 巻『写像』式 (7))．ただし，$m\leq n$ であることが前提である．

一方で，X から Y への全射は全部で何個あるだろうか? こちらは単射の場合と比べると難しく，数え上げには工夫が必要である．大きさが m の集合から大きさが n の集合への全射の個数を $s(m,n)$ で表す．$m<n$ ならば $s(m,n)=0$ であることは明白なので，ここでは $m\geq n$ を仮定しておこう．

$s(m,n)$ を求める方法は複数あるが，ここでは包除原理を応用した考え方を紹介する．$|X|=m$, $|Y|=n$ として，写像 $X\to Y$ の全体を Y^X で表す．第 2 巻『写像』演習 1.2(2) で見たように，$|Y^X|=n^m$ である．その中で全射の全体を S, 全射でない写像の全体を T でそれぞれ表す．$n^m=|Y^X|=|S|+|T|$ だから，$|T|$ が分かれば $|S|=s(m,n)$ も分かる．そこで，$|T|$ を求めることにする．

各々の $y\in Y$ に対して，$y\notin f(X)$ となる写像 $f\in Y^X$ の全体を T_y で表す．f が全射でないならば，ある $y\in Y$ に対して $y\notin f(X)$, つまり $f\in T_y$ となるから，T は全ての $y\in Y$ に渡る T_y らの和集合である．ここで，包除原理から

$$\sum_{I\subseteq Y}(-1)^{|I|}|T_I|=0 \tag{7}$$

である．ここで，$\sum_{I\subseteq Y}$ は Y の全ての部分集合 I に渡る和を表していて，$T_I=\bigcap_{y\in I}T_y$ である．ただし，$I=\emptyset$ に対しては $T_I=\bigcup_{y\in Y}T_y=T$ である (式 (1) を参照).

$I\neq\emptyset$ のとき，T_I は $I\cap f(X)=\emptyset$ である写像 $f\in Y^X$ の全体であるが，そのような f は (終集合を制限して考えれば) X から補集合 $Y\setminus I$ への写像と見なせるので，全部で $|Y\setminus I|^{|X|}=(n-|I|)^m$ 個ある．よって，式 (7) から

$$|T|=|T_\emptyset|=\sum_{\emptyset\subsetneq I\subseteq Y}(-1)^{|I|+1}|T_I|=\sum_{\emptyset\subsetneq I\subseteq Y}(-1)^{|I|+1}(n-|I|)^m$$

が成り立つ．この和を I の大きさごとに整理して計算すれば，

$$|T|=\sum_{k=1}^{n}\sum_{I\subseteq Y,|I|=k}(-1)^{|I|+1}(n-|I|)^m=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}(n-k)^m$$

を得る．(Y の中で大きさが k の部分集合 I は全部で $\binom{n}{k}=n!/k!(n-k)!$ 個あることに注意.) ゆえに，

$$s(m,n)=|S|=n^m-|T|=n^m+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^m=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)^m$$

である．k と $n-k$ の立場を入れ替えて (和をとる順番を入れ替えて)

$$s(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^m$$

と書くこともできる．($\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ であることにも注意.) これで $s(m,n)$ を m と n の式で表すことができた．総和記号が残っていてあまりスッキリした式ではないけれど，とにかくこれは m と n から計算できる式ではある． □

♦ 例 1.11　n 人が参加するパーティーがあって，それぞれの参加者はプレゼントを一つずつ持ち寄る．そしてパーティーの最後にプレゼント交換会を行う．このとき，自分が持ってきたプレゼントをそのまま受け取ってしまう悲しい参加者が発生してしまうと，そのプレゼント交換は失敗であるとする．さて，プレゼント交換はどれぐらいの確率で成功するだろうか?

参加者の全体を集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ で表そう．参加者 i が持ってきたプレゼントを参加者 j が受け取るとき，$\sigma(i) = j$ と表すことにする．これで，プレゼント交換を N 上の置換 σ で表現することができる．$\sigma(i) = i$ となる参加者 i は自分が持ってきたプレゼントを自分で持って帰る悲しい参加者であるが，このような i がいない確率がどれぐらいかを見たいわけである．

$\sigma(i) = i$ であるとき，i は σ の不動点であると言うことにする．N 上の置換を一様ランダムに選択したとき，それが不動点を持つ確率がどれぐらいかを見積もれば，プレゼント交換の失敗確率が分かる.[*3] (ということは，成功確率も分かる.) そこで，不動点を持つ置換の個数を見積もることにしよう．それぞれの $i \in N$ について，それを不動点とする置換 σ の全体を F_i で表す．不動点を持つ置換の全体 F はこれら全ての F_i に渡る和集合 $F = \bigcup_{i\in N} F_i$ である．ここで，包除原理から

$$\sum_{I\subseteq N} (-1)^{|I|} |F_I| = 0 \tag{8}$$

である．ただし，$\sum_{I\subseteq N}$ は N の全ての部分集合 I に渡る和であり，$F_I = \bigcap_{i\in I} F_i$ である．($I = \emptyset$ に対しては $F_I = \bigcup_{i\in I} F_i = F$ である.) $I \neq \emptyset$ のとき，F_I は I に属する全ての番号を動かさない置換の全体であるが，そのような置換は補集合 $N \setminus I$ 上の置換であると見なすことができるので，全部で $(n - |I|)!$ 個ある．よって，式 (8) から

$$|F| = |F_\emptyset| = -\sum_{\emptyset\subsetneq I\subseteq N} (-1)^{|I|} |F_I| = -\sum_{\emptyset\subsetneq I\subseteq N} (-1)^{|I|} (n - |I|)!$$

が成り立つ．この和を I の大きさごとに整理して計算すれば

$$|F| = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{I\subseteq N, |I|=k} (-1)^{|I|} (n - |I|)! = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

が得られる．したがって，不動点を持たない置換の個数は

$$n! - |F| = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

である．よって，n 人のプレゼント交換が成功する確率 p_n は

$$p_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

である．$n \to \infty$ とすると，p_n は $1/e$ に収束する．ここで，$e = \exp(1) = 2.71828\cdots$ は自然対数の底である．$1/e$ の概算値は $1/e = 0.36787944\cdots$ であり，参加者の人数 n が十分大きいときにはプレゼント交換の成功確率は概ね 37% 程度である．ということは，結構高い確率 (概ね 63% 程度) で失敗するということでもある． □

[*3] もちろんここでは，プレゼント交換においては全ての置換が同様に確からしい確率で発生することを前提にしている．

2 集合の大きさ

ここからが本巻のメインディッシュである．本節では, 集合の**濃度**という概念を考える．濃度という言葉を使っているが, 集合が「濃い」「薄い」ということを言っているのではなく, これは集合の大きさ, すなわち集合が含む元の個数のことを表す概念である．

集合 A に対して, A の濃度, すなわち A が含む元の個数のことをこの資料では $|A|$ で表している．A が有限集合であれば, この値は 0 または自然数である．一方, A が無限集合であるときには, $|A|$ は自然数で表せる量ではなく, $|A| = \infty$ としか書きようがない．しかし, もう少し深く考えてみると, 一口に「無限集合」とは言っても, **実はいろいろなレベルの「無限」があることが見えてくる**．これは素朴集合論を創始した Georg Cantor による極めて重要な発見であり, 素朴集合論のクライマックスは「無限」という概念をこのように繊細に把握できるようになったことにある．

2.1 基本的な考え方

A, B が有限集合であるとき, 命題 1.1(3) で見たように, A と B の大きさが同じであることは, 両者の間に全単射が存在することと同じである．これを踏まえて, 無限集合をも考慮に入れて, 次の通りに定義する．

集合の対等

定義 2.1. (有限とは限らない) 任意の集合 A, B に対して,

$$|A| = |B| \overset{\text{def}}{\iff} A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する}$$

と定義する．このとき, A と B は**対等**または**等濃**であると言う．

これは自然な考え方ではあるが, 少し心配なのは空集合の扱いである．しかし, 第 2 巻『写像』の補足 1.21 に注意して論理規則に従って考えれば, $|A| = |\emptyset|$ となるのは $A = \emptyset$ であるときに限られることがわかるので, 心配はいらない．この定義から, 対等関係は同値の公理 (反射性, 対称性, 推移性) を満たすことが分かる:

- **反射性**: 任意の集合 A について, $|A| = |A|$ である．
  これは, A 上の恒等写像 $A \to A$ が全単射であることから明らかである．
- **対称性**: 任意の集合 A, B について, $|A| = |B|$ ならば, $|B| = |A|$ でもある．
  これは, $f : A \to B$ が全単射ならば, その逆写像 $f^{-1} : B \to A$ も全単射であることから分かる．
- **推移性**: 任意の集合 A, B, C について, $|A| = |B|$ かつ $|B| = |C|$ ならば, $|A| = |C|$ でもある．
  これは, 全単射 $f : A \to B$ と全単射 $g : B \to C$ の合成 $g \circ f : A \to C$ が全単射であることから分かる．

♦ **例 2.2**　A を偶数の全体として, 写像 $f : \mathbb{Z} \to A$ を $f(x) = 2x$ で定義する．この f は全単射であるから, $|A| = |\mathbb{Z}|$ である．同様にして, B を奇数の全体として, 写像 $g : \mathbb{Z} \to B$ を $g(x) = 2x + 1$ で定めると, この g も全単射であるから, $|B| = |\mathbb{Z}|$ でもある．したがって, A, B, $\mathbb{Z}$ はどれも集合としての濃度は同じである．特に, $|A| = |B|$ であるから, $\mathbb{Z}$ 上で偶数と奇数は同じ個数だけある．□

この例では, A, B は $\mathbb{Z}$ の真部分集合であるのに濃度としては $\mathbb{Z}$ と同じである．これは $\mathbb{Z}$ が無限集合で

あるからこそ起こる現象であり, 有限集合では決してあり得ないことである.

定義 2.1 では, 2 つの集合 A, B の大きさが等しいという関係性が定義されたが, そこで個々の集合に対してその大きさを表す数量が直接定義されたわけではない. 個々の集合の大きさを表す数量を直接定義して, それを用いて 2 つの集合の大きさが等しいとか, 一方がもう一方よりも大きいという比較とか, そういうことはできないのだろうか?

それにはいいアイデアがある. 対等関係は同値関係だから, 各々の集合 A に対して, 対等関係に関する A の同値類 $|A|$ のことを A の濃度だと思ってしまえば, それぞれの集合に対する濃度が直接的に定義される. この考え方では, $|A|$ が A の大きさを表す '数量' だという感じはしないが, それは単に感覚だけの問題なので大したことではない. 2 つの集合 A と B が対等であるとき, かつその時に限って $|A| = |B|$ となるので, 集合の大きさを表すという濃度に期待される機能は十分に果たすことができる. ただし, この考え方によれば, 集合 A の濃度は A の同値類, すなわち A と対等な全ての集合の集まりであるが, これは一般に ZF 集合論で扱える範囲の集合を超える '大きすぎる集団' になってしまう (→演習 2.11).

それを承知で, ここでは**個々の集合 A はその大きさを表す一つの '数' $|A|$ を定めていて, A と B が対等であるとき, かつその時に限り $|A| = |B|$ であると考える**というアイデアはそのまま踏襲することにしよう——$|A|$ の実体が何かということには立ち入ることなく. もちろん, A が無限集合であるときには, その大きさを表す数 $|A|$ は 0 や自然数ではなく, その範囲を超えるところにある. このように, 何らかの集合の大きさを表している数を**濃度**と呼んで, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ などの字体で表すことにする. 通常の字体 m, n などはもっぱら 0 または自然数を表すものとする. ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ などは有限とは限らないだけであり, 文脈によっては有限の濃度を表すこともある.) $\mathfrak{n} = |A|$ であるとき, $\mathfrak{n}$ は A の濃度であると言い, A は $\mathfrak{n}$ を定めるとも言うことにする. 実は $|A|$ に実体を持たせることも可能であるが, その話については 4.6 項に先送りする.

さて, 以上の約束の下では, どの濃度 $\mathfrak{n}$ についても, $\mathfrak{n} = |A|$ となる集合 A が必ず存在する. このような A は一般に無数にあり, A と対等な全ての集合 A' に対して, かつそのような A' に対してのみ, $\mathfrak{n} = |A'|$ である. 例えば, $\mathfrak{n} = |A|$ であれば, $A' = A \times \{1\}$ に対しても $\mathfrak{n} = |A'|$ である. 以下の議論では, このように**同一の濃度が複数の異なる集合で表現される**ということは常に頭に置いておこう. このことを**濃度表現の多様性**と呼ぶことにする. 第 3 巻『同値関係』で解説した「同値類表現の多様性」と同じような事情がここにもある.

2.2 濃度の計算

濃度は集合の大きさを測るための数だから, 通常の自然数と同じように, 加法, 乗法などの計算規則を考えることができる. では一般に, 集合の濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ に対して, それらの大きさの和 $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ や積 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ をどのように定義するのが自然だろう?

- 任意の有限集合 A, B に対して, $A \cap B = \emptyset$ であるとき, 和集合 $A \cup B$ の大きさは $|A| + |B|$ である (→演習 1.1(1)). この事実を踏まえて, $\mathfrak{m} = |A|$, $\mathfrak{n} = |B|$ となる**互いに交わらない**任意の集合 A, B を選んで,

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \overset{\text{def}}{=} |A \cup B|$$

  と定める. なお, $\mathfrak{m} = |A|$, $\mathfrak{n} = |B|$ となる互いに交わらない集合 A, B は必ず存在する. $\mathfrak{m} = |A'|$, $\mathfrak{n} = |B'|$ となる任意の集合 A', B' を選んで, $A = A' \times \{0\}$, $B = B' \times \{1\}$ とおけばいい.

- 任意の有限集合 A, B に対して, 直積集合 $A \times B$ の大きさは $|A||B|$ である. この事実を踏まえて, $\mathfrak{m} = |A|$, $\mathfrak{n} = |B|$ となる任意の集合 A, B を選んで,

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} \overset{\text{def}}{=} |A \times B|$$

と定める.
- ついでなので, 濃度の冪乗も考えておく. 任意の有限集合 A, B に対して, A から B への写像の全体 B^A の大きさは $|B|^{|A|}$ である. これを踏まえて, $\mathfrak{m} = |A|$, $\mathfrak{n} = |B|$ となる任意の集合 A, B を選んで,

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} \overset{\text{def}}{=} |B^A|$$

と定める.

これらの定義には注意点がある. 先に述べたように, **濃度表現には多様性がある**ことを意識する必要があるからである. 例として, 積 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ の定義を取り上げる. A, A' がどちらも濃度 $\mathfrak{m}$ を表し, 同じく B, B' がどちらも濃度 $\mathfrak{n}$ を表すとき, $|A \times B|$ と $|A' \times B'|$ はどちらも積 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ を表すはずなので, $A \times B$ と $A' \times B'$ は対等でなければいけない. 幸い, $A \times B$ と $A' \times B'$ が対等であることは次のように容易に検証できる. $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ なので, 全単射 $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ がそれぞれ存在するが, このとき写像

$$h : A \times B \to A' \times B', \quad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

は全単射である (→演習 2.1). よって, 確かに $|A \times B| = |A' \times B'|$ が成り立つ. これで, 積 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ の定義は濃度表現の多様性に正しく対応できていることがわかった.

▶ **演習 2.1**　上記の写像 $h : (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ が全単射であることを示せ.

▶ **演習 2.2**　和 $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ とべき乗 $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ の定義が濃度表現の多様性に正しく対応するためには, それぞれどのようなことが成り立っている必要があるかを述べて, それが成り立っていることを証明せよ.

定義から, 自然数の計算と同じように次の基本的な法則が成立することはすぐに確かめられる. 以下, A, B, C はそれぞれ濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ を表す集合として, これらは組ごとに交わらないものとして説明する.[*4]

- 和の結合法則: $\mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p}$.
  このどちらも和集合 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ の大きさを表している.
- 積の結合法則: $\mathfrak{m}(\mathfrak{n}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{m}\mathfrak{n})\mathfrak{p}$.
  両者は共に直積集合 $A \times B \times C$ の大きさである.
- 和の交換法則: $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$.
  両者は共に和集合 $A \cup B = B \cup A$ の大きさである.
- 積の交換法則: $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\mathfrak{m}$.
  これは直積集合 $A \times B$ と $B \times A$ が対等であることによる. (自然な全単射 $(a, b) \mapsto (b, a)$ を考えればよい.)
- 0 の公理: $\mathfrak{m} + 0 = 0 + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.
  これは $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ であることによる.
- 1 の公理: $\mathfrak{m}1 = 1\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. これは, $A \times \{1\}$ と $\{1\} \times A$ がどちらも A と (自明な全単射によって) 対等であることによる.

[*4] そうでない場合には, A, B, C をそれぞれ $A \times \{1\}$, $B \times \{2\}$, $C \times \{3\}$ に置き換えて考えればよい.

命題 2.3 (分配法則). $\mathfrak{m}(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})=\mathfrak{mn}+\mathfrak{mp}$ である. (補足: $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p}=\mathfrak{mp}+\mathfrak{np}$ も同様に成立する.)

証明. A, B, C はそれぞれ $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ を表す集合として, これらは組ごとに交わらないと仮定しておいてよい. $\mathfrak{m}(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ は集合 $A\times(B\cup C)$ の濃度であり, $\mathfrak{mn}+\mathfrak{mp}$ は集合 $(A\times B)\cup(A\times C)$ の濃度である. ここで, 第 1 巻『集合と論理』演習 4.20(2) からこれら 2 つの集合は等しいので, 当然それらの濃度も等しい. よって, 示すべき等式が得られる. □

♦ **例 2.4** A を濃度 $\mathfrak{n}$ を表す集合とする. このとき, 冪濃度 $2^{\mathfrak{n}}$ は A の冪集合 2^A の濃度であることを示す. この事実は, A が n 個の元から成る有限集合であれば 2^n 個の部分集合を持つという事実の自然な一般化である.

$2^{\mathfrak{n}}$ は A から 2 元集合 $I=\{0,1\}$ への写像の全体集合 I^A の濃度である. だから, I^A と冪集合 2^A が対等であることを示せばよい. 任意の $f\in I^A$ を A の部分集合 $f^{-1}(1)$ に変換する写像を $\mu : I^A\to 2^A$ で表す. 一方, $X\in 2^A$ をその特性関数 χ_X (→第 2 巻『写像』例 1.11) に変換する写像を $\chi : 2^A\to I^A$ で表す. μ は χ を逆写像とする全単射であり (→演習 2.3), $2^{\mathfrak{n}}=|I^A|=|B^A|=|2^A|$ である. □

▶ **演習 2.3** 例 2.4 において, χ が μ の逆写像であることを示せ.

♦ **例 2.5** 濃度が $\mathfrak{m}$ である集合を $\mathfrak{n}$ 個集めた非交和集合 (直和集合) の濃度は $\mathfrak{mn}$ であることを示そう. これも「大きさが m である集合を n 個集めた非交和集合の大きさは mn である」ことの自然な一般化である.

I を濃度が $\mathfrak{n}$ の添字集合, $\{A_i\}_{i\in I}$ を濃度が $|A_i|=\mathfrak{m}$ の集合から成る集合族で, 組ごとに交わらないものとする.[*5] 示すべきことは, 和集合 $U=\bigcup_{i\in I}A_i$ が濃度 $\mathfrak{mn}$ を持つことである. A を濃度 $\mathfrak{m}$ を表す任意の集合とする. $A\times I$ は濃度 $\mathfrak{mn}$ を表すから, U と $A\times I$ が対等であることを示せば $|U|=|A\times I|=\mathfrak{mn}$ が言える.

それぞれの $i\in I$ について, $|A_i|=\mathfrak{m}=|A|$ なので, 全単射 $f_i : A_i\to A$ が存在する. 任意の $a\in U$ に応じて, $a\in A_i$ となる $i\in I$ が存在するが, この i は a に一意的である. (i の一意性は集合 A_i らが組ごとに交わらないことによる.) その i を i_a で表す. これを用いて, 写像 $f : U\to A\times I$ を次の式で定める:

$$f(a)\stackrel{\mathrm{def}}{=}(f_{i_a}(a), i_a).$$

i_a の定義から $a\in A_{i_a}$ であり, したがって $f_{i_a}(a)$ は A の元として正しく定まることにも注意しておく. この f が全単射であることを示せばよいが, そのためには f の逆写像を構成すればよい. その詳細は演習問題として残しておく (→演習 2.4). □

▶ **演習 2.4** 例 2.5 において, f の逆写像を求めよ.

余談だが, 例 2.5 の中ではこっそりと選択公理が使われている. それはどこかと言えば, 各々の $i\in I$ に対して全単射 $f_i : A_i\to A$ を選んでくるところである. そこをあえて選択公理の使用を明示して書けば, 次のような感じになる:

> どの $i\in I$ についても, $|A_i|=\mathfrak{m}=|A|$ なので, A_i から A への全単射の全体集合 $\mathcal{P}_i$ は空集合ではない. よって, 選択公理から, 全ての $i\in I$ に対して $\phi(i)\in\mathcal{P}_i$ を満たす選択関数 ϕ が存在する. そして, $f_i=\phi(i)$ とおく.

[*5] $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$ であるということ.

本来はこのようにして, 全ての $i \in I$ に対して f_i を'確定' させておかないと, それに続く写像 $f : U \to A \times I$ の定義ができない.[*6] 普通はここまで丁寧に選択公理の使用を明示せずに, 例 2.5 のような議論で済ませることが多いが, 無限個の対象に対して何かを指定するなどという場面ではそこに選択公理が隠れている可能性がある. 同じような感じで, 次の例でも選択公理が隠れている.

♦ **例 2.6** m, n を自然数とするとき, m^n は m を n 個並べた積であり, これは大きさが m である集合を n 個並べて作られる直積集合の大きさに等しい. 一方, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ を集合の濃度とすると, $\mathfrak{m}^\mathfrak{n}$ は「濃度が $\mathfrak{n}$ の集合から濃度が $\mathfrak{m}$ の集合への写像の総数」というのが元々の定義である. ここでは, それが「濃度が $\mathfrak{m}$ の集合を $\mathfrak{n}$ 個並べた直積集合の濃度」に一致することを確かめよう.

I を濃度が $\mathfrak{n}$ の添字集合, $\{A_i\}_{i \in I}$ を濃度が $|A_i| = \mathfrak{m}$ である集合の族とする. 示したいことは, 直積集合 $P = \prod_{i \in I} A_i$ が濃度 $\mathfrak{m}^\mathfrak{n}$ を持つことである.

P の射影を $p_i : P \to A_i$ で表す. つまり, 任意の $x \in P$ について, $p_i(x)$ はその A_i-成分である. 濃度 $\mathfrak{m}$ を表す任意の集合 A を取る. A^I は濃度 $\mathfrak{m}^\mathfrak{n}$ を表すから, P と A^I が対等ならば $|P| = |A^I| = \mathfrak{m}^\mathfrak{n}$ が従う. よって, P と A^I が対等であることを示せばよい.

各 $i \in I$ について, $|A_i| = \mathfrak{m} = |A|$ なので, 全単射 $f_i : A \to A_i$ が存在する. 任意の $y \in P$ に対して, 写像 $\gamma_y \in A^I$ を

$$\gamma_y(i) = f_i^{-1}(p_i(y)), \qquad \forall i \in I$$

で定める. これで写像 $\gamma : P \to A^I$ $(y \mapsto \gamma_y)$ が定まる. これが全単射であることを示せばよい. $y, z \in P$, $\gamma_y = \gamma_z$ とすると, 全ての $i \in I$ について $f_i^{-1}(p_i(y)) = \gamma_y(i) = \gamma_z(i) = f_i^{-1}(p_i(z))$ となるが, この両辺を f_i で変換すれば $p_i(y) = p_i(z)$ が得られる. これが全ての $i \in I$ について言えるから, $y = z$ である (→第 2 巻『写像』命題 5.3(1)). よって, γ は単射である. 次に, γ が全射であることを示す. 任意の写像 $g \in A^I$ を考える. 第 2 巻『写像』命題 5.3 から, P の元 y で, その各々の A_i-成分が $f_i(g(i))$ であるものが唯一つ存在する. 全ての $i \in I$ について, $\gamma_y(i) = f_i^{-1}(p_i(y)) = f_i^{-1}(f_i(g(i))) = g(i)$ だから, $g = \gamma_y$ である. よって, γ は全射である. □

$\mathfrak{m} = |B|$ であるとき, $\mathfrak{m}^0$ は空集合 $\emptyset$ から B への写像の全体集合が持つ濃度であるが, そのような写像は空写像だけなので, $B^\emptyset$ は単元集合である. よって, $\mathfrak{m}^0 = 1$ である. (これは $\mathfrak{m} = 0$ にも当てはまるので, $0^0 = 1$ である.) 一方で, $\mathfrak{n} \neq 0$ であれば $0^\mathfrak{n} = 0$ であるが, これは空でない集合から空集合への写像が存在しないことによる.

命題 2.7 (濃度の指数法則 I)**.** $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^\mathfrak{n}\mathfrak{m}^\mathfrak{p}$.

証明. A, B, C をそれぞれ $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ を表す集合とする. これらは組ごとに交わらないと仮定してよい. $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}}$ は $A^{B \cup C}$ の濃度であり, $\mathfrak{m}^\mathfrak{n}\mathfrak{m}^\mathfrak{p}$ は直積 $A^B \times A^C$ の濃度である. これらの集合 $A^{B \cup C}$ と $A^B \times A^C$ が対等であることを示せばよい. 任意の写像 $f \in A^{B \cup C}$ に対して, f の始集合を B に制限した写像を $f_B \in A^B$, C に制限した写像を $f_C \in A^C$ でそれぞれ表し, $f^\mu = (f_B, f_C) \in A^B \times A^C$ とおく. これで写像 $\mu : A^{B \cup C} \to A^B \times A^C$ $(f \mapsto f^\mu)$ が定まる. μ が全単射であることを示せばよい. $f, g \in A^{B \cup C}$, $f^\mu = g^\mu$ とすると, それぞれ $f_B = g_B$, $f_C = g_C$ である. 任意の $x \in B \cup C$ について, $x \in B$ ならば $f(x) = f_B(x) = g_B(x) = g(x)$ であり, $x \in C$ ならば $f(x) = f_C(x) = g_C(x) = g(x)$ である. したがっ

*6 f_i は存在するのは確かだから, 何でもいいから f_i を持ってきておけばそれでいいじゃないかと言いたくなる気持ちもよくわかる. しかし, そう言いたくなるのは心の中で既に選択公理を暗黙に認めているからである.

て, $f = g$ である. ゆえに, μ は単射である. $(u, v) \in A^B \times A^C$ とする. (つまり, u は写像 $B \to A$, v は写像 $C \to A$ である.) 写像 $f \in A^{B \cup C}$ が次の式で定まる: 任意の $x \in B \cup C$ について,

$$f(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} u(x) & (x \in B) \\ v(x) & (x \in C). \end{cases}$$

この定義から明らかに, u は f の B への制限, v は C への制限であり, $u = f_B$, $v = f_C$ である. よって, $f^\mu = (f_B, f_C) = (u, v)$ である. これで μ が全射であることも示された. □

▶ **演習 2.5** (濃度の指数法則 II) $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$ であることを示せ.

以上に見てきた通り, 濃度の計算規則は自然数の計算規則と似通っているところがたくさんある. しかし, やはり有限と無限の違いが際立つところもそれなりにある. たとえば, $\mathbb{Z}$ の濃度を考えよう. 例 2.2 で見たように, 偶数の全体 A と奇数の全体 B は共に $\mathbb{Z}$ と対等であり, $|A| = |B| = |\mathbb{Z}|$ である. 一方, $\mathbb{Z}$ は A と B の合併だから, 濃度の和の定義から $|\mathbb{Z}| = |A| + |B|$ である. よって, $|\mathbb{Z}| = |A| + |B| = |\mathbb{Z}| + |\mathbb{Z}|$ である. これを素直に解けば $|\mathbb{Z}| = 0$ となってしまうが, これはもちろん事実でない. (この例は, 一般に濃度の引き算はうまく定義できないことを示している.) このように, **無限濃度を含む計算では自然数の感覚が通用しないことも多々ある**.

2.3 有限集合と無限集合

これまでは「有限集合」「無限集合」という言葉を直観的に何となく用いてきたが, ここでもう少し精密な定義を作っておこう. 自然数 n に対して, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく. $n = 0$ に対しては特別に $[0] = \emptyset$ と定めておく.

定義 2.8 (有限集合と無限集合)**.** 集合 A が**有限集合**であるとは, ある整数 $n \geq 0$ が存在して, $|A| = |[n]|$ であることを言う. A が有限集合でないとき, すなわちどの整数 $n \geq 0$ についても A と $[n]$ が対等にならないとき, A は**無限集合**であると言う.

定義として書くと仰々しく見えるが, これはつまり $[n]$ を「濃度が n である有限集合」の代表選手として用いるということである.

2.4 濃度の大小比較

A, B が有限集合であるときには, 命題 1.1(1) から $|A| \leq |B|$ であることは単射 $A \to B$ が存在することと同じである. これを, そのまま無限濃度も含めて全ての濃度について定義として取り入れてしまおう.

濃度の大小比較

定義 2.9. $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ がそれぞれ集合 A, B で表されるとき, A から B への単射 $A \to B$ が存在するとき, かつその時に限り, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ であると定める.

この定義についても, 濃度表現の多様性に対する注意が必要である. A, A' が共に濃度 $\mathfrak{m}$ を表し, B, B' が共に濃度 $\mathfrak{n}$ を表すとする. もし定義 2.9 の下で $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ であるならば, 単射 $A \to B$ が存在するとき, かつその時に限り単射 $A' \to B'$ が存在するのでなければならない. この事実の検証は次の通り容易である.

$|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ だから, それぞれ全単射

$$f : A \to A', \quad g : B \to B'$$

が存在する. 単射 $\phi : A \to B$ が存在するならば, 合成写像 $g \circ \phi \circ f^{-1}$ は A' から B' への単射である. (単射どうしの合成は単射であることにも注意する.) 逆に, 単射 $\phi' : A' \to B'$ から単射 $g^{-1} \circ \phi' \circ f : A \to B$ が生じることも同様にしてわかる.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, "g\circ\phi\circ f^{-1}"'] & B'. \end{tikzcd}$$

以上から, 定義 2.9 は濃度表現の多様性にきちんと対応している.

$A \subseteq B$ であるときには, 包含写像 $e : A \to B$ $(e(a) = a)$ が取れるが, e は単射だから, $|A| \leq |B|$ である. これはつまり, **部分集合の大きさは全体集合の大きさ以下である**ということだが, 直観的にはごく当たり前のことである.

命題 2.10. $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ がそれぞれ集合 A, B で表されているとする. $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ であるためには, B から A への全射が存在することが必要十分である.

証明. $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ とするとき, 定義 2.9 から単射 $A \to B$ が存在する. よって, 第 2 巻『写像』系 4.9 から全射 $B \to A$ が存在する. 逆に, 全射 $B \to A$ が存在するならば, 第 2 巻『写像』系 4.9 から単射 $A \to B$ が存在するので, 定義 2.9 から $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ である. □

▶ **演習 2.6**　任意の写像 $f : X \to Y$ について, $|f(X)| \leq |X|$ であることを示せ. 特に, f が単射であれば, $|f(X)| = |X|$ であることを示せ. その逆に, $|f(X)| = |X|$ であれば f は単射であると言えるか?

▶ **演習 2.7**　任意の濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ について, 次のことを証明せよ.

(1) **反射性**: $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}$ である.
(2) **推移性**: $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{p}$ ならば, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$ である.

注意: **見た目だけで「当たり前だ」と思ってはいけない**. これは定義 2.9 に従って証明する練習である.

▶ **演習 2.8**　$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ であるためには, 濃度 $\mathfrak{n}$ を持つ集合が濃度 $\mathfrak{m}$ の部分集合を持つことが必要十分であることを示せ.

▶ **演習 2.9**　$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{n}'$ とするとき, 次のことをそれぞれ証明せよ. (これも見た目だけで「当たり前だ」と思わないこと. 定義に従って忠実に証明する練習である.)

(1) $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$ である.
(2) $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ である.
(3) $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} \leq \mathfrak{n}'^{\mathfrak{m}'}$ である.

Cantor-Schröder-Bernstein の定理

定理 2.11. $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$ ならば $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ である.

これは, 集合の濃度についても数の大小関係と同じ性質「$a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ である」が成り立つことを示していて, 濃度の大小関係は反対称的であり, したがって演習 2.7 で示された反射性と推移性とを合わせて, 順序の公理を全て満たしていることを主張している. 一見するとこれは当たり前のことにしか見えないが, 定義に立ち返ればこれは「単射 $A \to B$ と単射 $B \to A$ が存在するならば, 全単射 $A \to B$ が存在する」ことを言っており, 特に A, B が無限集合である場合まで考慮すれば, とても「明らか」で済ませられることではない. 証明は複数通り知られているが, ここではその中でも初等的な証明として広く知られている証明を紹介する.

証明. 単射 $f : A \to B$, $g : B \to A$ が存在すると仮定して, これらを用いて全単射 $A \to B$ を構成することが目標である. 任意の整数 $n \geq 0$ について, 集合 C_n を次の要領で定める:

$$C_n \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} A \setminus g(B) & (n = 0 \text{ のとき}) \\ g(f(C_{n-1})) & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

この定義では, C_0 が決まれば C_1 が決まり, そこから C_2 が決まり…という再帰的な構造になっている. これら全ての C_n に渡る和集合を $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$ とする. どの n についても $C_n \subseteq A$ だから, $C \subseteq A$ である. $a \in A \setminus C$ ならば, $a \notin C$ なので, 特に $a \notin C_0$ でもあり, したがって $a \in g(B)$ である. よって, $A \setminus C \subseteq g(B)$ である.

g は単射なので, 第 2 巻『写像』定理 4.8(1) から g の左逆写像 $g' : A \to B$ が存在する. これを用いて写像 $h : A \to B$ を次の式で定める:

$$h(a) \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} f(a) & (a \in C \text{ のとき}) \\ g'(a) & (a \in A \setminus C \text{ のとき}), \end{cases} \qquad \forall a \in A.$$

これが全単射であることを示せばよい.

(I) h が単射であることを示す. $a, a' \in A$, $h(a) = h(a')$ を仮定して $a = a'$ を示せばよい.

- $a, a' \in C$ のとき: $f(a) = h(a) = h(a') = f(a')$ であるが, f は単射なので, $a = a'$ である.
- $a, a' \in A \setminus C$ のとき: $g'(a) = h(a) = h(a') = g'(a')$ である. $A \setminus C \subseteq g(B)$ なので, $a, a' \in g(B)$ でもあり, $a = g(b)$, $a' = g(b')$ $(b, b' \in B)$ と書ける. g' は g の左逆写像だから, $g' \circ g = \epsilon_B$ である. ゆえに,
$$b = \epsilon_B(b) = g'(g(b)) = g'(a) = g'(a') = g'(g(b')) = \epsilon_B(b') = b'$$
となる. したがって, $a = g(b) = g(b') = a'$ である.
- $a \in C$, $a' \in A \setminus C$ のとき: $f(a) = h(a) = h(a') = g'(a')$ である. $a' \in A \setminus C \subseteq g(B)$ だから, $a' = g(b')$ となる $b' \in B$ が存在する. よって, $g(f(a)) = g(g'(a')) = g(g'(g(b'))) = g(b') = a'$ となる. (3 つ目の等号は $g' \circ g = \epsilon_B$ であることによる.) $a \in C$ だから, ある整数 $n \geq 0$ に対して $a \in C_n$ であり, したがって $a' = g(f(a)) \in g(f(C_n)) = C_{n+1} \subseteq C$ である. これは $a' \notin A \setminus C$ に反する. よって, この場合は起こり得ない.
- $a \in A \setminus C$, $a' \in C$ のとき: これも a と a' の立場を入れ替えて同様に考えれば, 起こり得ない場合であることが分かる.

(II) h が全射であることを示す. 任意の $b \in B$ に応じて, $b = h(a)$ となる $a \in A$ が存在することを示せばよい. $b \in f(C)$ ならば, ある $a \in C$ に対して $b = f(a) = h(a)$ となる. $b \notin f(C)$ のときを考える. $a = g(b) \in A$ とおく. $a \in C$ とすると, ある $n \geq 0$ に対して $a \in C_n$ である. $a = g(b) \in g(B)$ だから,

$n \neq 0$ である．すると，$g(b) = a \in C_n = g(f(C_{n-1}))$ なので，ある $x \in C_{n-1}$ に対して $g(b) = g(f(x))$ となる．ここで g は単射だから，$b = f(x) \in f(C_{n-1}) \subseteq f(C)$ となり，$b \notin f(C)$ に反する．したがって，$a \notin C$，つまり $a \in A \setminus C$ である．よって，$h(a) = g'(a) = g'(g(b)) = \epsilon_B(b) = b$ である．□

濃度の比較定理

定理 2.12. 任意の濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ に応じて，$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ または $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$ が成立する．

上の定理は，**どの 2 つの濃度も大小比較がつく**ことを主張していて，要するに濃度の大小関係は全順序だと言っている．これも一見当たり前に見える主張であり，確かに有限濃度のみを考える場合はそれでもいいが，無限濃度も考慮に入れると証明は途端に難しくなる．なお，$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ と $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ が両方成り立つ場合には，定理 2.11 から $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ である．

証明. 濃度が $\mathfrak{m}$ の集合 X と濃度が $\mathfrak{n}$ の集合 Y をそれぞれ取っておく．整列可能定理 (→第 4 巻『順序関係』定理 3.6) から，X と Y は整列集合であると考えてよい．整列集合の比較定理 (→第 4 巻『順序関係』定理 3.24) から，(i) X と Y は同型である; (ii) X は Y の切片に同型である; (iii) Y は X の切片に同型である; のうちどれかちょうど 1 つが成り立つ．(i) の場合には同型 $f : X \to Y$ が存在するが，f は全単射だから $\mathfrak{m} = |X| = |Y| = \mathfrak{n}$ である．(ii) の場合には，全射ではない埋め込み $f : X \to Y$ があるが，これは単射だから $\mathfrak{m} = |X| \leq |Y| = \mathfrak{n}$ である．対称的に，(iii) の場合には $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{n}$ が成り立つ．□

この証明は，見かけは短いが，その中には整列可能定理と整列集合の比較定理という整列順序に関する深い定理が利用されていて，その内実はそれほど簡単なものではない．

▶ **演習 2.10**　任意の濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ について，次のことを証明せよ．

(1) $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{p}$ ならば $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$ である．
(2) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} < \mathfrak{p}$ ならば $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$ である．

☕ Coffee Break ☕

その定理は自明か?

Bernstein の定理や濃度の比較定理など，濃度の大小に関する一連の事実は自明であるかのように感じてしまいがちである．濃度の大小比較に関する定義が私たちの直観にフィットしていることや，数の大小関係について私たちが既にある程度のイメージを持っていて，「濃度の大小関係も数の大小関係と同じようなものだろう」という思い込みに影響されてしまうことがその大きな原因かもしれない．濃度の比較について $\leq$ という見慣れた記号を使っていることも，この思い込みに一役買っていそうだ．しかし，実際にはどちらの定理もすぐに明らかと言えるほど簡単なものではない．**記号やイメージに騙されて，実際には明らかではないものを明らかであると思い込まないようにしよう**．

思い込みが危険な事例を見てみよう．$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$ (等号は入らない) ならば $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} < \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$ (等号は入らない) と言えるだろうか? 思わず YES と言いたくなるかも知れないが，答えは NO である．同じく，$0 < \mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$ ならば $\mathfrak{m}\mathfrak{n} < \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ であると言えるだろうか? やはり答えは期待に反して NO である．これらの反例についてはもう少し後で挙げる (→補足 3.6)．

♦ **例 2.13** 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\},$$
$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

は対等であることを示そう. $(x,y) \in A$ ならば, $|x| + |y| \le 1$ だから,

$$x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \le 1$$

であり, $(x,y) \in B$ となる. よって, $A \subseteq B$ であり, $|A| \le |B|$ が成り立つ. 後は $|A| \ge |B|$ を示せば, 定理 2.11 から $|A| = |B|$ が従う. 任意の $(x,y) \in B$ に対して, $f(x,y) = (x/4, y/4)$ とおく. $(x,y) \in B$ だから, $|x|^2 \le |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2 \le 1$ だから, $|x| \le 1$ である. 同じく, $|y| \le 1$ である. よって,

$$\left(\left|\frac{x}{4}\right| + \left|\frac{y}{4}\right|\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{|x||y|}{8} \le \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} < 1$$

だから, $|x/4| + |y/4| \le 1$ である. ゆえに, $f(x,y) \in A$ である. したがって, f は B から A の中への写像と見なすことができる. f は明らかに単射であり, $|B| \le |A|$ となる.

この例では, 全単射 $A \to B$ を直接構成しようとすると面倒な話になるが, 上の議論のように $|A| \le |B|$ と $|B| \le |A|$ を個別に証明すればよいということであれば, ぐっと簡単な話になる. □

♦ **例 2.14** $\mathbb{R}$ の空でない開区間 $I = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ は全て $\mathbb{R}$ 全体と対等であることを示そう. $I \subseteq \mathbb{R}$ だから $|I| \le |\mathbb{R}|$ であることは明らかである. そこで, $|I| \ge |\mathbb{R}|$ を示せば, 定理 2.11 から $|I| = |\mathbb{R}|$ が言える. まず, 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+2^x)$ は単射であり, $f(\mathbb{R}) \subseteq (0,1)$ なので, $|\mathbb{R}| \le |(0,1)|$ である. 次に, $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a + (b-a)x$ は単射であり, その像は $I = (a,b)$ なので, $|(0,1)| = |I|$ である. ゆえに, $|\mathbb{R}| \le |I|$ でもある. 以上から, $|\mathbb{R}| = |I|$ が成り立つ. なお, この事例では直接 $\mathbb{R}$ と I を結ぶ全単射を構成することもそれほど難しくはない.

またこのことから, $\mathbb{R}$ の部分集合 A が空でない開区間 I を含むならば, $|\mathbb{R}| = |I| \le |A| \le |\mathbb{R}|$, したがって $|A| = |\mathbb{R}|$ である.「空でない開区間を含む部分集合は全て $\mathbb{R}$ 全体と対等である」というこの事実は, 定理 2.11 の助けなしに証明することはなかなか難しいだろう. □

例 2.14 によれば, 例えば開区間 $(0, 10^{-1000000000})$ の中には $\mathbb{R}$ 全体がすっぽり入ってしまうことになる. 砂粒の中に全宇宙がすっぽり入ってしまうような感覚である. 無限の世界というのはつくづく非常識なことが起こる世界である.

2.5 Cantor の定理と対角線論法

有限集合の世界では, 集合の大きさ (元の個数) の観点から見て,「最も大きな集合」は存在しない. X が有限集合である限り, それがどんなに大きな有限集合であろうが, その大きさは何らかの自然数 n であり, 大きさが $n+1$ の有限集合, 例えば $[n+1] = \{1, 2, \dots, n+1\}$ を持ってくれば, X の最大性はあっさり否定されてしまうからである.

それでは, 無限集合についてはどうだろうか? 濃度の観点で最も大きな無限集合は存在するのだろうか. 言い換えれば,「最大の (無限) 濃度」は存在するのだろうか? $\mathfrak{n}$ を任意の無限濃度とするとき, $\mathfrak{n}+1$ は $\mathfrak{n}$ よりも真に大きな濃度…と言いたくなるところだが, そこでもう既に有限世界の常識に引きずられている. 実際には, $\mathfrak{n}$ が無限濃度である限り $\mathfrak{n}+1 = \mathfrak{n}$ である (→命題 3.10).

次の命題がこの疑問に答える鍵になっている．この命題は，どの濃度 $\mathfrak{n}$ よりも冪濃度 $2^{\mathfrak{n}}$ の方が真に大きいことを主張している．したがって，**「最大の濃度」は存在しない**．

Cantor の定理

定理 2.15. 任意の濃度 $\mathfrak{n}$ に対して，$\mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{n}}$ である．

証明．$\mathfrak{n}$ が集合 A の濃度であるとすると，例 2.4 から $2^{\mathfrak{n}}$ は冪集合 2^A の濃度である．任意の $a \in A$ を単元集合 $\{a\} \in 2^A$ に変換する写像 $A \to 2^A$ は単射であり，$\mathfrak{n} = |A| \leq |2^A| = 2^{\mathfrak{n}}$ である．一方で，$\mathfrak{n} \geq 2^{\mathfrak{n}}$ ではないことを背理法で示そう．$\mathfrak{n} \geq 2^{\mathfrak{n}}$ と仮定すると，全射 $g : A \to 2^A$ が存在する．任意の $a \in A$ について，$g(a) \in 2^A$ なので，それは A の部分集合である．$C = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$ とおく．g は全射なので，$g(a) = C$ となる $a \in A$ が存在する．$a \in C$ ならば，$a \notin g(a) = C$ であり矛盾する．$a \notin C$ であれば，$a \in g(a) = C$ なのでやはり矛盾する．したがって，$\mathfrak{n} \geq 2^{\mathfrak{n}}$ は成り立たない．ゆえに，$\mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{n}}$ である． □

第 1 巻『集合と論理』の第 5 節では，「全ての集合から成る集合」が集合として認められないことを話したが，そのことは定理 2.15 を用いて説明することもできる．X を「全ての集合から成る集合」として，その冪集合 2^X を考える．2^X の要素は集合であるが，X は全ての集合から成るので，$2^X \subseteq X$ である．よって，$|2^X| \leq |X|$ であるが，これは定理 2.15 矛盾する．この矛盾は，Georg Cantor に因んで **Cantor のパラドックス**と呼ばれている．

▶ **演習 2.11**　X を空でない集合とするとき，X と対等な集合の全体 C_X は集合ではないこと (C_X を集合と認めれば矛盾が生じること) を示せ．

定理 2.15 の証明では，全射 $g : A \to 2^A$ が存在すると仮定してうまい具合に矛盾を導いているわけであるが，その基本的な発想は次の通りである．次のような仮想的な表をイメージしよう．

- 各々の行および列は A の元で (同じ順番で) 番号付けされている．A が無限集合である場合にはもちろん表のサイズは無限に大きい．
- 任意の $i, j \in A$ について，(i, j)-成分は $i \in g(j)$ であれば 1，そうでなければ 0 である．

例えば，下の表では (a_1, a_2)-成分が 0 であるのは $a_1 \notin g(a_2)$ だからであり，(a_3, a_3)-成分が 1 であるのは $a_3 \in g(a_3)$ だからである，などと考える．

	a_1	a_2	a_3	$\cdots$
a_1	0	0	1	$\cdots$
a_2	1	1	0	$\cdots$
a_3	0	1	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

さて，証明中で考えた集合 $C = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$ は，この表において (a, a)-成分が 0 である元 a の全体である．ある $a \in A$ について $C = g(a)$ であるとすると，表の (a, a)-成分の値は $a \in C$ であれば 1，そうでなければ 0 であるが，一方で C の定義から (a, a)-成分は $a \in C$ ならば 0，そうでなければ 1 のはずであり，真逆になる．このように，どの $a \in A$ についても $C = g(a)$ とならないことが，表の対角成分に沿って分かるというカラクリになっている．この手の論法は**対角線論法**と呼ばれている．対角線論法は実にウマい論法であり，万能ではないものの，様々なところで「存在しないこと」の証明に利用されている．

3 可算無限集合

$\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ はどちらも無限集合であるが, この両者では濃度が異なっている. $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ であることは明白だが, ここで等号は成立せず, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ が成り立つ. $\mathbb{N}$ の濃度は「可算濃度」と呼ばれ, $\mathbb{R}$ の濃度は「連続濃度」あるいは「連続体濃度」と呼ばれているが, 本節ではこれら 2 つの基本的な無限濃度について学習する.

3.1 可算集合

自然数の全体 $\mathbb{N}$ は無限集合であるが, これと濃度が同じ集合を**可算無限集合**と言う. すなわち, A が可算無限集合であるとは, A と $\mathbb{N}$ との間に全単射が存在することを言う. そのような集合 A はもちろん無限集合であり, そのことを強調して「可算無限集合」と書いたが, 実際には '無限' を省略して単に**可算集合**と呼ばれることが多い. 以下でも,「可算無限集合」と「可算集合」は同義語として扱っている.

可算集合は全て $\mathbb{N}$ と対等であるから, どれも同じ濃度の集合である. 可算集合の濃度は慣習的に $\aleph_0$ などの記号で表すことが多い.*7 すなわち, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ である.

A が可算集合ならば, 全単射 $f : \mathbb{N} \to A$ が存在する. 任意の自然数 n について, $a_n = f(n) \in A$ とすると, まず f が単射であることから a_n は n によって全て異なっていて, さらに f が全射であることから, A のどの元も必ず a_n という形式で書くことができる. したがって,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

のように, 元に一つずつ自然数による背番号をつけて A の元を全列挙できる. これが「可算」(数えられる) という言葉の意味である. ただし, A は無限集合なので背番号は無限個必要であり, 有限個の背番号だけで数えきることはできない. 全ての自然数をフルに使えば数え切ることができる.

無限集合の中には可算ではないものもたくさんある. 例えば, 定理 2.15 から冪集合 $2^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ よりも真に濃度が大きい無限集合である. このように, 可算でない無限集合を**非可算集合**と言う.

可算濃度は最小の無限濃度

定理 3.1. 任意の無限集合は可算部分集合を含む.

証明. X を任意の無限集合とする. 整列可能定理 (→第 4 巻『順序関係』定理 3.6) から, X は整列集合であると仮定してよい. $a_1 = \min X$ とおき, 以下再帰的に $n \geq 2$ に対して

$$a_n = \min(X \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\})$$

と定義する. (X は無限集合なので, $X \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ は空集合ではない.) $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ は X の可算無限部分集合である. □

この定理は, **可算濃度は最小の無限濃度**であることを示している. 実際, $\mathfrak{n}$ を任意の無限濃度とし, X を濃度 $\mathfrak{n}$ を表す無限集合とすると, 定理 3.1 から X は可算部分集合 A を持つので, $\aleph_0 = |A| \leq |X| = \mathfrak{n}$ である.

*7 $\aleph$ はヘブライ文字の一つで「アレフ」と読む. $\aleph_0$ は「アレフ・ゼロ」と読む.

補足 3.2　定理 3.1 の証明として, 次のような議論が紹介されることがある. A を任意の無限集合とする. $A \neq \emptyset$ なので, 元 $a_1 \in A$ を一つ選ぶことができる. $A \setminus \{a_1\}$ も空集合ではないから, そこから元 a_2 を一つ選ぶことができる. $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ だから, $a_1 \neq a_2$ である. 続けて, $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ でもあるので, ここから元 a_3 を選ぶと, a_3 は a_1, a_2 のいずれとも異なる. この調子で, 一般に相異なる有限個の元 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ $(n \geq 2)$ を選び出したとき, $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ は (A が無限集合であることから) 空集合ではないので, そこから元 a_n を選べば, a_n は $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ のいずれとも異なる. この操作を繰り返せば, 可算部分集合 $A_0 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ を得る.

一見ごく自然で分かりやすい議論であるが, この議論で示していることは, 任意の自然数 n について X が大きさ n の有限部分集合を含んでいること, そして $n+1$ 個目の元をそれ以外から選べるということである. これらのことと, X が可算無限部分集合を含むことの間にはギャップがあるのでは? と指摘されれば, それは確かにその通りである.

先に述べた正式な証明では, 整列可能定理を持ち出してこのギャップを回避している. X を任意に整列しておけば, $a_1, a_2, a_3, \dots$ はその整列順序から自ずと順次確定していく元なので, 無事に可算無限部分集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ の存在を主張できるわけである. ここで整列可能定理を用いたということは, 定理 3.1 を証明するために選択公理に頼っているということだが, 実は選択公理を前提にしない場合には定理 3.1 は成立しないことが分かっている (→ 3.4 項). だから, 選択公理なしには定理 3.1 は証明できない. □

有限集合と可算集合を合わせて**高々可算**な集合と言う. 集合 A が高々可算であることは, A から $\mathbb{N}$ への (全射とは限らない) 単射が存在することと同じであり, また $\mathbb{N}$ から A への (単射とは限らない) 全射が存在することとも同じである.

系 3.3. 可算集合の無限部分集合は可算である.

証明. A を任意の可算集合, B をその任意の無限部分集合とする. $B \subseteq A$ なので, $|B| \leq |A|$ である. B は無限集合だから, 定理 3.1 から $|\mathbb{N}| \leq |B|$ である. A は可算集合なので, $|A| = |\mathbb{N}|$ である. よって, $|\mathbb{N}| \leq |B| \leq |A| = |\mathbb{N}|$ となり, 定理 2.11 から $|B| = |A| = |\mathbb{N}|$ となる. ゆえに, B も可算である. □

♦ **例 3.4**　$A = \{0, 1, 2, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ とおく. これらは共に可算集合である. 実際, 全単射 $A \to \mathbb{N}$ が $a \mapsto a+1$ で得られるし, 全単射 $\mathbb{N} \to B$ が $n \mapsto 2n-1$ で得られる. そして第 2 巻『写像』例 3.17 から, 直積集合 $A \times B$ から $\mathbb{N}$ への全単射が存在するので, $A \times B$ も可算集合である. A, B は共に可算集合, つまり $\mathbb{N}$ と対等なので, $|\mathbb{N}| = |A \times B| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ である. つまり, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合である. これは, 濃度の積を用いて表現すれば

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$$

ということであるが, この両辺を $\aleph_0$ で割って $\aleph_0 = 1$ とはならない. **そもそも $\aleph_0$ は自然数ではないので, 自然数の計算規則は当てはまらない**. 例 2.6 から, $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ は $\aleph_0^2 = \aleph_0$ と同じことだが, さらに数学的帰納法を使えば, 任意の自然数 n について $\aleph_0^n = \aleph_0$ であることも言える. つまり, **有限個の可算集合に渡る直積集合は可算である**. 例えば, $\aleph_0^{1000000} = \aleph_0$ であるが, これも有限世界の常識的感覚からすると十分すぎるぐらい非常識な現象である.

$\mathfrak{n}$ が無限濃度であれば, 定理 3.1 から $\mathfrak{n} \geq \aleph_0$ であり, 演習 2.9(3) から $\aleph_0^{\mathfrak{n}} \geq \aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ である. (最後の不等号は定理 2.15 による.) このように, **無限個の可算集合に渡る直積集合はもはや可算ではな**

い. さらに言えば, $\mathfrak{n}$ が無限濃度ならば $2^{\mathfrak{n}} \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ であり, 例 2.6 で見たように $2^{\aleph_0}$ は 2 元集合を可算個並べた直積集合の濃度であるから, **無限個の 2 元集合に渡る直積集合でさえ可算ではない**. □

$\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ だから, 特に高々可算な濃度 $\mathfrak{n}$ に対して $\mathfrak{n}\aleph_0 \leq \aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ であることも言える. 特にここで, $\mathfrak{n} > 0$ であれば, $\aleph_0 \leq \mathfrak{n}\aleph_0 \leq \aleph_0$ なので, $\mathfrak{n}\aleph_0 = \aleph_0$ である.

可算個の可算集合の和集合は可算

命題 3.5. $A_1, A_2, A_3, \ldots$ を可算個の高々可算集合とするとき, 和集合 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も高々可算である. 特に, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ の中に一つでも可算集合があれば, A も可算集合である.

証明. 各番号 n について, A_n は高々可算なので, 単射 $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ が存在する.[*8] 任意の $a \in A$ について, $a \in A_n$ となる自然数 n が存在するが, このような最小の n を n_a で表す.[*9] 写像 $f : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を次の式で定義する:

$$f(a) \overset{\text{def}}{=} (f_{n_a}(a), n_a).$$

ここで, n_a の定義から $a \in A_{n_a}$ だから, $f_{n_a}(a)$ は $\mathbb{N}$ の元として正しく定まっていることに注意しよう.

$a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ とするとき, $(f_{n_a}(a), n_a) = (f_{n_{a'}}(a'), n_{a'})$ である. 第 2 項目から $n_a = n_{a'}$ であるが, この値を n とする. 第 1 項目から $f_n(a) = f_n(a')$ であるが, f_n は単射なので, $a = a'$ である. ゆえに, f は単射である. したがって, $|A| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ である. (最後の等号は例 3.4 による.) よって, A は高々可算である. 一方で, ある n に対して A_n が可算集合であれば, $|A| \geq |A_n| = \aleph_0$ でもあるから, 定理 2.11 から $|A| = \aleph_0$ が得られる. □

さて, 命題 3.5 から特に, 2 つの互いに交わらない可算集合の和集合も可算集合であることもわかる. (A_1, A_2 を互いに交わらない可算集合として, A_3 以降は全て空集合であると考えればよい.) このことを濃度の和を用いて表現すれば,

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

ということである. もちろん, これは $\aleph_0 = 0$ を意味しない. しつこいが, **$\aleph_0$ は自然数ではない**. また, 演習 2.9(1) を使えば, 高々可算な濃度 $\mathfrak{n}$ に対して,

$$\aleph_0 \leq \aleph_0 + \mathfrak{n} \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

であり, したがって定理 2.11 から $\aleph_0 + \mathfrak{n} = \aleph_0$ であることもわかる.

補足 3.6　一般に, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$ であっても $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} < \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$ であるとは限らない. 具体的な反例は可算濃度を利用すれば簡単に構成できる. 例えば, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' = \aleph_0$, $\mathfrak{n}$ を任意の有限濃度, $\mathfrak{n}' = \aleph_0$ とするとき, 確かに $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$ であるが, $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ と $\mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$ はどちらも $\aleph_0$ である.

また, $0 < \mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$ であっても $\mathfrak{m}\mathfrak{n} < \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ であるとは限らないが, これも上記の具体例が反例になっている. (ただし, $\mathfrak{n} \neq 0$ としておく.) 実際, $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ はどちらも $\aleph_0$ である. □

[*8] 細かいことだが, ここで各々の A_n に対して単射 f_n を確定させるところでは隠れて選択公理が使われている.
[*9] ここで n_a が「最小」であることには本質的な重要性はなく, 後で n_a の最小性を利用するというわけではない. 単に n_a が a から一意的に決まる値であるようにしたいだけである.

♦ **例 3.7** ($\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ は可算)　$\mathbb{Z}$ は 2 つの可算集合 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ と $-\mathbb{N} = \{-1, -2, \dots\}$ の和集合なので, 命題 3.5 からそれは可算集合である. $\mathbb{Z}$ の可算性は, 第 2 巻『写像』演習 3.6(1) で構成された全単射

$$f(n) = \begin{cases} 2n & (n > 0 \text{ のとき}) \\ 1 - 2n & (n \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で直接確かめることもできる. 直観的には $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ の 2 倍程度は大きいが, 濃度としては $\mathbb{N}$ と同じである.

$\mathbb{Z}^*$ を 0 以外の整数の全体とする. $\mathbb{Z}$ は可算であり, $\mathbb{Z}^*$ はその無限部分集合だから, 系 3.3 から $\mathbb{Z}^*$ は可算である. よって, 例 3.4 から直積 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ も可算集合である. 写像 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ を $(a, b) \mapsto a/b$ で定める. f は全射なので[*10], 命題 2.10 から $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*| = \aleph_0$ である. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だから $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ でもある. ゆえに, 定理 2.11 から $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ である. □

この例 3.7 までに, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ は全て可算であることを見てきた. $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{N}$ に比べるとはるかに大きそうな感じがするが, 濃度という観点では $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ は対等である. やはり, 無限世界は一筋縄ではいかない. 一方で, 後で見るように $\mathbb{R}$ は可算ではなく, したがってそれを部分集合に含む $\mathbb{C}$ も可算ではない.

♦ **例 3.8**　$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$ を任意の可算集合とする. 定理 2.15 から, 冪集合 2^A は非可算である. $\mathcal{F}$ を A の有限部分集合の全体とする. 任意の $F \in \mathcal{F}$ に応じて, 番号 n を適切に大きく選べば, F は $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の部分集合となる. したがって,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{A_n}$$

である. ここで, A_n は有限集合だから, その冪集合 2^{A_n} も有限集合である. したがって, $\mathcal{F}$ は可算個の有限集合の和集合なので, 命題 3.5 から $\mathcal{F}$ は高々可算である. ここで, $\mathcal{F}$ が有限集合でないことは, 任意の自然数 n について $A_n \in \mathcal{F}$ であることから明らかである. ゆえに, $\mathcal{F}$ は可算無限集合である.

A の無限部分集合の全体を $\mathcal{G}$ とすると, 冪集合 2^A は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の和集合である. ここで $\mathcal{G}$ も可算集合ならば, 命題 3.5 から 2^A も可算であるが, 実際には 2^A は非可算なのでそれはあり得ない. したがって, $\mathcal{G}$ は非可算集合である. よって, A の部分集合のうち, 無限部分集合の方が有限部分集合よりも真にたくさんある. □

♦ **例 3.9**　Σ を空でない高々可算な集合とし, Σ^* を Σ 上の文字列の全体とする. 任意の $n \geq 0$ について, 長さが n である文字列の全体を Σ^n で表すと, Σ^* は全ての $n \geq 0$ に渡る Σ^n らの和集合である. Σ^n は Σ を n 個並べた直積集合と対等であるから, Σ が有限集合であれば Σ^n も有限集合であるし, Σ が可算集合であれば Σ^n も可算集合である. ゆえに, いずれにせよ Σ^n は高々可算である. よって, Σ^* は可算個の高々可算な集合の和集合であるから, 命題 3.5 から Σ^* は高々可算である. 一方, Σ^* が無限集合であることは $\Sigma \neq \emptyset$ であることから従う. ゆえに, Σ^* は可算集合である. □

命題 3.10. X を無限集合, A を高々可算な集合とするとき, $|X \cup A| = |X|$ である.

証明. (I) $X \cap A = \emptyset$ の場合を考える. X は無限集合なので, 定理 3.1 から X は可算部分集合 X_0 を持つ. A は高々可算なので, 命題 3.5 から $X_0 \cup A$ は可算である. よって, 全単射 $f : X_0 \to X_0 \cup A$ が存在

[*10] f が全射であることは, もちろん任意の有理数が分数表示を持つことによる.

する．写像 $g : X \to X \cup A$ を次のように定義する (→図 1):

$$g(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} f(x) & (x \in X_0) \\ x & (x \notin X_0), \end{cases} \qquad \forall x \in X.$$

g が全単射であることを示せば, $|X| = |X \cup A|$ を結論できる．まず, $g(X \setminus X_0) = X \setminus X_0$ であること,

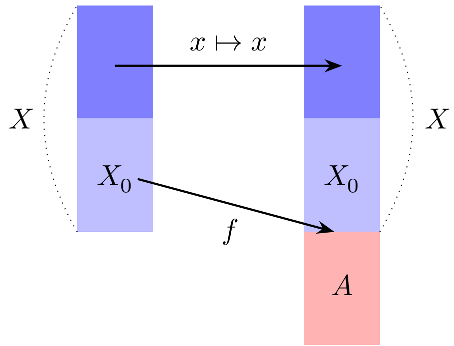

図 1　命題 3.10 の証明における写像 g の構成.

$g(X_0) = f(X_0) = X_0 \cup A$ であることに注意する．$X \cap A = \emptyset$ だから, これら 2 つの像は交わらない．

$x, y \in X$, $g(x) = g(y)$ とする．$x \in X_0$ ならば, $g(y) = g(x) = f(x) \in X_0 \cup A$ なので, $y \in X_0$ であり, したがって $f(y) = g(y) = g(x) = f(x)$ となるが, f は単射だから $y = x$ である．$x \notin X_0$ ならば, $g(y) = g(x) = x \in X \setminus X_0$ だから, $y \in X \setminus X_0$ であり, したがって $y = g(y) = g(x) = x$ である．よって, いずれにせよ $x = y$ であり, g は単射である．

$y \in X \cup A$ とする．$y \in X_0 \cup A$ のとき, f が全射だから $f(x) = y$ となる $x \in X_0$ が存在するが, それに対して $g(x) = f(x) = y$ となる．$y \notin X_0 \cup A$ ならば, $y \in X \setminus X_0$ なので, $g(y) = f(y) = y$ である．よって, g は全射である．

(II) $X \cap A = \emptyset$ とは限らない一般の場合を考える．$A' = A \setminus X$ とおく．A は高々可算であり, A' はその部分集合なので, A' も高々可算である．$X \cap A' = \emptyset$ だから, (I) から $|X \cup A'| = |X|$ である．そして $X \cup A = X \cup A'$ なので, $|X \cup A| = |X \cup A'| = |X|$ が成り立つ．　□

命題 3.10 は, 任意の無限濃度 $\mathfrak{m}$ と高々可算な濃度 $\mathfrak{n}$ について $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ であることを意味する．さて, このことを踏まえて, 次の命題を考えよう．

命題 3.11. $\mathfrak{m}$ を非可算無限濃度, $\mathfrak{n}$ を高々可算な濃度, $\mathfrak{p}$ を任意の濃度とする．$\mathfrak{p} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ ならば, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ である．[*11]

証明. $\mathfrak{p}$ が高々可算ならば, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} + \mathfrak{n} \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 < \mathfrak{m}$ となって矛盾する．ゆえに, $\mathfrak{p}$ は非可算無限濃度である．濃度 $\mathfrak{m}$ を持つ任意の集合 M を選んでおく．$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ だから, 演習 2.8 から, M の部分集合 X で $|X| = \mathfrak{p}$ であるものが存在する．$A = M \setminus X$ とおく．次の 2 つの場合に分けて考えよう．

(i) A が高々可算の場合: X と A に対して命題 3.10 を使えば, $\mathfrak{m} = |M| = |X \cup A| = |X| = \mathfrak{p}$ が得られる．

(ii) A が非可算集合の場合: $\mathfrak{n} \leq \aleph_0 < |A|$ だから, A の部分集合 B で $|B| = \mathfrak{n}$ であるものが存在する．$A \cap X = \emptyset$ かつ $B \subseteq A$ なので $B \cap X = \emptyset$ である．よって, $|X \cup B| = |X| + |B| = \mathfrak{p} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m} = |M|$

[*11] これは $\mathfrak{m} = \aleph_0$ のときには成立しない．反例: $\mathfrak{p} = 1$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} = \aleph_0$.

であり, 全単射 $f : X \cup B \to M$ が存在する. f は単射なので, $|f(X)| = |X| = \mathfrak{p}$ かつ $|f(B)| = |B| = \mathfrak{n}$ である. $X \cap B = \emptyset$ であり, かつ f は全単射だから, M は $f(X)$ と $f(B)$ の非交和である. $f(B)$ は高々可算なので, $f(X)$ と $f(B)$ に命題 3.10 を使えば, $\mathfrak{m} = |M| = |f(X) \cup f(B)| = |f(X)| = |X| = \mathfrak{p}$ が得られる. □

命題 3.11 の証明で, 次のようなもっと簡単な '証明' を考えつくかも知れないが, これらはどちらも誤りである. どちらも, 命題 3.10 から $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ であることを利用している.

(誤証明 1) $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ と $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} + \mathfrak{n}$ を比べて $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ を得る. □

これは要するに, $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{p}$ はどちらも $\mathfrak{m} - \mathfrak{n}$ だから等しいという発想であるが, 前に述べた通り, 無限濃度に対して引き算はうまく定義できないので, この論法は通用しない.

(誤証明 2) $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ である. ここで, $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ であれば, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} + \mathfrak{n} < \mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ となるから矛盾である. よって, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ である. □

これの落とし穴は, $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ を仮定して $\mathfrak{p} + \mathfrak{n} < \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ を結論するところである. 補足 3.6 で見た通り, 一般には $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$ でも $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} < \mathfrak{m} + \mathfrak{n}'$ であるとは限らない.

3.2 連続濃度

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{N}$ よりもはるかに大きいはずだが, 例 3.7 で見たように, 濃度としては $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ である. ところが, これから見ていく通り実数の全体 $\mathbb{R}$ は非可算集合である. 可算濃度 $\aleph_0$ に対して, $\mathbb{R}$ の濃度を**連続濃度**と言う. 慣習的に, 連続濃度のことを記号 $\aleph$ で表す. 例 2.14 から, $\mathbb{R}$ の空でない開区間は全て濃度 $\aleph$ を持っている.

$\mathbb{R}$ は非可算

定理 3.12 (Cantor)**.** $\mathbb{R}$ は非可算無限集合である.

証明. 開区間 $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ が非可算であることを示せば十分である. $(0,1)$ が可算であると仮定して矛盾を導く背理法を用いる. $(0,1)$ が可算ならば, $(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ のように $(0,1)$ の元を自然数の '背番号' でもれなく列挙できる. $(0,1)$ に属する各々の実数 x に対して 10 進小数展開を考える. ただし, 有限小数については, $0.125000\cdots$ と $0.124999\cdots$ のように, 後ろに 0 が無限に続く表し方と 9 が続く表し方の 2 通りが可能であるが, ここではもっぱら前者の表し方に固定しておこう. こうすることで, どの x も一意的な 10 進小数展開を持つことになる.

x_i の小数点以下第 j 位を x_{ij} とする. これは $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ に属する整数である. 各自然数 i について

$$y_i = \begin{cases} 2 & (x_{ii} \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (x_{ii} \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \tag{9}$$

と定義して, $y = 0.y_1 y_2 y_3 \cdots$ と表される小数 $y \in (0,1)$ を考える.[*12] $y \in (0,1)$ だから, ある i が存在して $y = x_i$ となる. 両辺で小数点以下第 i 位を見れば, $y_i = x_{ii}$ となる. ところが, x_{ii} が奇数であれば

[*12] すなわち, $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k / 10^k$ とおくということである. 各々の y_k が 1 または 2 なので, この級数は確かに区間 $(0,1)$ のどこかに収束する.

$y_i = 2$ は偶数であり, x_{ii} が偶数ならば $y_i = 1$ は奇数である. このように, $y_i = x_{ii}$ の両辺で偶奇が一致しないので矛盾である. ゆえに, $(0, 1)$ は非可算である. □

この証明の肝はもちろん式 (9) の仕込み方にあって, y がどの x_i とも一致しないことが対角成分 x_{ii} に沿ってわかるというカラクリになっている. これも対角線論法の一例である. $\mathbb{R}$ が非可算であることは, 定理 2.15 と次の命題を組み合わせることでも分かる.

命題 3.13. $\aleph = 2^{\aleph_0}$ である.

証明. 以下, 定理 3.12 の証明と同様の 10 進小数展開を用いる. 任意の $x \in (0, 1)$ について, その小数展開を $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ として,

$$\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{(i, x_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$$

とおく. $\phi(x)$ の中で, 第 1 成分が i であるのは (i, x_i) のみである. $x, y \in (0, 1)$, $\phi(x) = \phi(y)$ とすると, 全ての $i \geq 1$ に対して $x_i = y_i$ だから, $x = y$ である. よって ϕ は単射であり, $\aleph = |\mathbb{R}| = |(0, 1)| \leq |2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0}|$ である. ここで, $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}_0$ は可算だから, 例 3.4 から $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0| = \aleph_0$ であり, したがって $|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0}| = 2^{\aleph_0}$ である. ゆえに, $\aleph \leq 2^{\aleph_0}$ である.

逆向きの不等号を示そう. 任意の $A \subseteq \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \in A$ のとき $A(n) = 1$, $n \notin A$ のとき $A(n) = 2$ と定めて, 小数展開によって

$$\psi(A) \stackrel{\text{def}}{=} 0.A(1)A(2)A(3)\cdots \in (0, 1)$$

と定義する. $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $\psi(A) = \psi(B)$ とすると, 全ての $n \geq 1$ について $A(n) = B(n)$ なので, $A = B$ である. よって ψ は単射であり, $2^{\aleph_0} = |2^{\mathbb{N}}| \leq |(0, 1)| = \aleph$ でもある. ゆえに, 定理 2.11 から $2^{\aleph_0} = \aleph$ である. □

♦ **例 3.14**　A を任意の可算集合とする. A の有限部分集合の全体を $\mathcal{F}$ とし, 無限部分集合の全体を $\mathcal{C}$ とすると, 冪集合 2^A はこれら 2 つの和集合である. 例 3.8 から, $\mathcal{F}$ は可算である. 命題 3.13 から $\aleph = |2^A| = |\mathcal{F}| + |\mathcal{C}| = \aleph_0 + |\mathcal{C}|$ であるが, ここで命題 3.11 を使えば $|\mathcal{C}| = \aleph$ が言える. ゆえに, 可算集合は全部で $\aleph$ 個の無限部分集合を持つ. 可算集合の中では, 有限部分集合よりも無限部分集合の方が圧倒的に多い. □

♦ **例 3.15**　ここでは, **多項式**とは有理数を係数に持つ定数でない多項式 (1 次以上の多項式) を指すものとする. 実数 $a \in \mathbb{R}$ が**代数的**であるとは, $f(a) = 0$ となる多項式 f が存在することを言う. 代数的でない実数は**超越的**であると言う.

さて, ここでクイズ. 実数のうちで, 代数的であるものと超越的であるものはどちらが多いだろう? ちなみに, 有理数は全て代数的であるし, 無理数でも $\sqrt{2}$ や $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ のように代数的な数はたくさんある.

多項式 f について, $f(a) = 0$ となる実数 a の全体を $Z(f)$ で表す. f が d 次多項式であれば, $Z(f)$ は高々 d 個の実数から成る有限集合である. (空集合である可能性もある.) 定義から, 代数的な実数の全体 A は全ての多項式 f に渡る $Z(f)$ らの和集合である.

さて, 任意の d 次多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ は係数の列 $(a_0, a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Q}^{d+1}$ で表現できる. $\mathbb{Q}$ は可算集合だから, $\mathbb{Q}^{d+1}$ も可算集合である. (例 3.4 から, 有限個の可算集合らの直積集合は可算である.) ゆえに, d 次多項式の全体 P_d も可算集合である. 多項式の全体 P は全ての $d \geq 1$ に渡る P_d らの和集合なので, 命題 3.5 から P も可算集合である. したがって, A は可算個の有限集合 $Z(f)$ らの和集

合であり, それは高々可算な集合である. $\mathbb{Q} \subseteq A$ だから, A はもちろん無限集合であり, したがって A は可算集合である.

もし超越数の全体 T も可算集合であれば, 命題 3.5 から $\mathbb{R} = A \cup T$ も可算集合であることになるが, これは上で示したことに反する. よって, T は非可算であり, $|A| < |T|$ である. つまり, 代数的な実数よりも超越的な実数の方が真に多い. 命題 3.11 を A が代数的実数の全体, X が超越的実数の全体 T である場合に適用すれば, $|\mathbb{R}| = |T \cup A| = |T|$ となって, 実際には T と $\mathbb{R}$ は対等であることがわかる. □

▶ **演習 3.1**　$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$ であることを示せ.

演習 3.1 は, A と B が可算集合ならば, A から B への写像は全部で $\aleph$ 個あることを示している. 例 2.6 から, 可算集合を可算個並べた直積集合の濃度は $\aleph$ であると言うこともできる.

▶ **演習 3.2**　任意の濃度 $1 \leq \mathfrak{n} \leq \aleph_0$ に対して, $\aleph^{\mathfrak{n}} = \aleph$ であることを示せ.

▶ **演習 3.3**　$\aleph^{\aleph} > \aleph$ であることを示せ.

演習 3.2 によれば, 1 次元の数直線 $\mathbb{R}$, 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$, 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ などは全て濃度としては対等である. 複素数の全体 $\mathbb{C}$ は平面 $\mathbb{R}^2$ と対等なので, $\mathbb{C}$ も $\mathbb{R}$ と対等である. $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ の中ではごく薄っぺらい部分を占めるに過ぎないのに両者の間には全単射があるというのは, 図形的なイメージからすると理解し難い結果である. また, 例 2.5 から $\aleph^2 = \aleph\aleph$ は濃度 $\aleph$ を持つ集合を $\aleph$ 個用いた非交和集合の濃度であるが, 演習 3.2 からそれは $\aleph$ に等しい.

3.3　連続体仮説

ここまでに, 具体的な無限濃度として可算濃度 $\aleph_0$ ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ および $\mathbb{Q}$ の濃度) および連続濃度 $\aleph$ ($\mathbb{R}$ の濃度, および可算集合の冪集合の濃度) を紹介した. 選択公理を認めれば, 可算濃度は最小の無限濃度である. 連続濃度はそれよりも真に大きいが, これらの中間に位置する濃度, すなわち $\aleph_0 < \mathfrak{n} < \aleph$ を満たす濃度 $\mathfrak{n}$ が存在しないという主張を**連続体仮説**と言う. この主張が正しければ, 連続濃度は 2 番目に小さな無限濃度だということになる.

連続体仮説が「仮説」と呼ばれているのは, ZFC 集合論 (ZF に選択公理を含めた集合論) では, 連続体仮説の主張が原理的に証明も反証もされないということが明らかにされているからである. すなわち, ZF が無矛盾であれば, ZFC も無矛盾であるが, この前提の下では次のような状況になっている.

- ZFC に連続体仮説を加えても無矛盾である (Kurt Gödel). したがって, ZFC では連続体仮説を否定できない.
- ZFC に連続体仮説の否定を加えても無矛盾である (Paul Cohen). したがって, ZFC では連続体仮説を肯定できない.

連続体仮説の変種として,「どの無限濃度 $\mathfrak{n}$ についても, $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{n}}$ を満たす濃度 $\mathfrak{m}$ は存在しない」という主張を**一般連続体仮説**と言う. (連続体仮説は, 一般連続体仮説の中の $\mathfrak{n} = \aleph_0$ の場合に相当する.) 一般連続体仮説もまた, ZFC から独立していることが証明されている. なお, ZF に一般連続体仮説を追加した公理系——それは ZF が無矛盾である限り無矛盾である——では, 選択公理が定理として導かれることが知られている.

3.4 Dedekind 無限集合

例 2.2 では, $\mathbb{Z}$ において偶数の全体 A と奇数の全体 B は共に $\mathbb{Z}$ 全体と対等であることを見た．つまり, $\mathbb{Z}$ はその真部分集合と対等になるわけであるが, 選択公理を認めれば, このような現象は任意の無限集合で起こることが次のようにして言える．

補題 3.16. A が可算部分集合を含むならば, A はある真部分集合 B と対等である．特に, $A \setminus B$ が無限集合であるように B を選ぶこともできる．

証明. 仮定から, A は可算部分集合 $C = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ を持つ．さらに, C は互いに交わらない可算部分集合 $D = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}$ と $E = \{a_2, a_4, a_6, \dots\}$ に分割される．$F = A \setminus C$, $B = F \cup E$ とおく (図 2). B は A から D を除いた差集合 $A \setminus D$ であるが, これは A 自身と対等である．それは, 次の写像

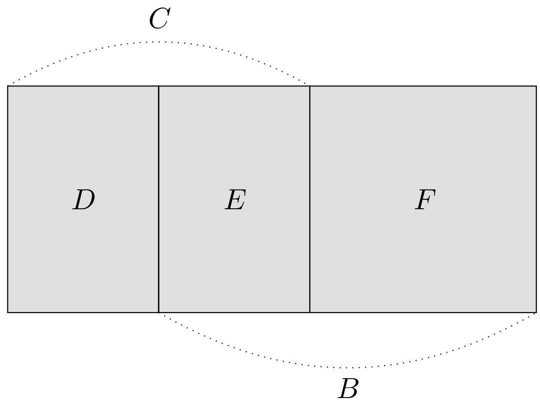

図 2　補題 3.16 の証明.

$$f : A \to B, \quad a \mapsto \begin{cases} a_{2n} & (a = a_n \in C) \\ a & (a \in F) \end{cases}$$

が全単射であることからわかる．したがって, A はその真部分集合 B と対等である．そしてさらに, 補集合 $A \setminus B = D$ は無限集合である． □

選択公理を認める前提では, 定理 3.1 から任意の無限集合は可算部分集合を含んでいるので[*13], この補題によりそれはある真部分集合と対等になる．Richard Dedekind は, この「真部分集合と対等」という特徴を利用して, 無限集合を次のように定義したが, これは自然数概念に頼らず無限を定義したものとして特筆すべきものである:

Dedekind による無限集合の定義
集合 A が無限集合であるとは, A の真部分集合で A 全体と対等であるものが存在することを言う．

このような集合のことを **Dedekind 無限集合**と呼ぶ．そして, Dedekind 無限ではない集合を **Dedekind 有限集合**と呼ぶ．つまり, どの真部分集合とも決して対等にならない集合が Dedekind 有限集合である．

選択公理の下では無限集合は全て Dedekind 無限である. (同じことだが, 選択公理の下では Dedekind 有限集合は全て有限集合である.) 一方で, Dedekind 無限集合が無限集合であることは直観的には明白だが, きちんと証明することもできる．

[*13] 定理 3.1 の証明には整列可能定理が使われているが, 整列可能定理は選択公理と同値である．

命題 3.17. 任意の集合 A について, 次の条件は全て同値である.

(1) A は Dedekind 無限である.
(2) 全射ではない単射 $A \to A$ が存在する.
(3) 単射 $\mathbb{N} \to A$ が存在する.
(4) A は可算部分集合を持つ.

証明. (1)⇒(2): A が Dedekind 無限集合であれば, A 自身と対等な真部分集合 B が存在する. A, B は対等なので全単射 $f : A \to B$ が存在する. これに包含写像 $e : B \to A$ を合成した写像 $e \circ f : A \to A$ は単射である. 一方, $e(f(A)) = e(B) = B \subsetneq A$ なので, $e \circ f$ は全射ではない.

(2)⇒(3): $f : A \to A$ を全射ではない単射とする. f は全射なので, 像 $f(A)$ に属さない元 $a \in A$ が存在する. これを利用して, 写像 $g : \mathbb{N} \to A$ を次のように再帰的に定義する:

$$g(n) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & (n = 1) \\ f(g(n-1)) & (n \geq 2). \end{cases}$$

この g が単射であることを示す. 任意の自然数 $n \geq 2$ について $g(n) \notin \{g(1), \dots, g(n-1)\}$ であることを示せば十分である. n に関する数学的帰納法を用いる. g の定義から $g(2) = f(g(1)) = f(a) \in f(A)$ であるが, a の選び方から $g(1) = a \notin A$ なので, $g(2) \neq g(1)$ である. よって, $n = 2$ のとき主張は成り立つ. $n \geq 3$ とする. 帰納法の仮定から $g(1), g(2), \dots, g(n-1)$ は全て異なるが, f は単射なので, それらを f で変換した結果 $g(2), g(3), \dots, g(n)$ も全て異なる. 一方で, $g(n) = f(g(n-1)) \in f(A)$ であるが, a の選び方から $g(1) = a \notin A$ でもあるので, $g(n) \neq g(1)$ である. ゆえに, $g(n) \notin \{g(1), g(2), \dots, g(n-1)\}$ である.

(3)⇒(4): 任意の単射 $f : \mathbb{N} \to A$ について, 像 $f(\mathbb{N})$ は A の可算部分集合である.

(4)⇒(1): これは補題 3.16 から明らかである. □

A が Dedekind 無限集合ならば, 命題 3.17 から A は可算部分集合を含むが, 可算集合は無限集合だから, A も無限集合である. よって, Dedekind 無限集合は全て無限集合である. (同じことだが, 有限集合は全て Dedekind 有限である.) 命題 3.17 および補題 3.16 の証明は選択公理がなくても通用するから,「Dedekind 無限集合は無限集合である」という結論は選択公理がなくても成立する. 一方で, 既に述べた通り, 選択公理の下では無限集合は全て Dedekind 無限である. 以上から, **選択公理の下では, 無限集合と Dedekind 無限集合は全く同じものである**.

一方で, 選択公理を前提としない場合は様相が異なることがわかっている. 以下, 選択公理を AC (Axiom of Choice) と略記して,「無限集合は全て Dedekind 無限である」という主張を Ded (Dedekind) と略記する. 実は, もちろん ZF が無矛盾という前提の話であるが, ZF に Ded の否定——つまり, 無限かつ Dedekind 有限な集合が存在するということ——を付け加えても矛盾が生じないことが証明されている. これはつまり, ZF が無矛盾であれば, **AC 抜きの ZF では, Ded は原理的に証明できない**ことを意味する. さらに言えば, ZF に Ded を追加しても AC を導くことはできないことも示されている. つまり, ZF を基準に考えれば, Ded は AC よりも真に弱い (AC から Ded は導かれるが, 逆に Ded は AC を導かない) ということになる.

3.5 無限濃度・再論

可算濃度 $\aleph_0$ に関しては $\aleph_0^2 = \aleph_0$ が成り立つが, これは 2 つの可算集合らの直積がまた可算であることを意味している. この事実を繰り返し使えば, 有限個の可算集合らの直積集合も可算であることが分かる. 同様のことが連続濃度 $\aleph$ に関しても言える. 実は, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ は任意の無限濃度について成り立つことである. つまり, X が無限集合であれば, $X \times X$ と X は対等である.

無限集合は自身との直積と対等

定理 3.18. 濃度 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ について, 次の 2 つの条件を仮定する.

(i) $\mathfrak{m}$ は無限濃度である.
(ii) $1 \leq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ である.

このとき, $\mathfrak{n}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ である. 特に, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ である.

この定理を示すために, まずは手始めに, 定理の主張よりも少し弱い次の補題から着手する. 定理では $\mathfrak{n}$ は 1 以上 $\mathfrak{m}$ 以下の任意の濃度であるが, この補題では $\mathfrak{n}$ は可算濃度以下に抑えられている.

補題 3.19. 濃度 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ について, 次の 2 つの条件を仮定する.

(i) $\mathfrak{m}$ は無限濃度である.
(ii) $1 \leq \mathfrak{n} \leq \aleph_0$ である.

このとき, $\mathfrak{n}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ である.

証明. (I) $\mathfrak{n} = \aleph_0$ の場合を考える. $\mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$ であることを示せばよい. 濃度 $\mathfrak{m}$ を持つ任意の集合 X をする. 整列可能定理から, X は整列集合であると仮定できる. 以下, 第 4 巻『順序関係』3.3 項で利用した記法を用いる. つまり, $x+1$ は x の直後を表し, $n \geq 2$ に対して $x+n$ は $x+(n-1)$ の直後を表す. $x+0$ は x 自身を表す.

P を X の非後続元の全体とする. 第 4 巻『順序関係』演習 3.2 から, 各々の元 $x \in X$ は一意的な分解 $x = a+n$ $(a \in P,\ n \in \mathbb{N}_0)$ を持つ. この分解を利用して, 単射 $f : X \to P \times \mathbb{N}_0$, $a+n \mapsto (a, n)$ が得られる. ここで, 次の 2 通りの場合があり得る.

(i) $\max X$ が存在しない場合: $(a, n) \in P \times \mathbb{N}_0$ とする. 仮定から a は $\max X$ ではないので, その直後 $a+1$ が存在する. この $a+1$ も $\max X$ ではないので, さらに直後 $(a+1)+1 = a+2$ が存在する. これを繰り返すと, $x = a+n$ が存在することが分かり, それに対して $f(x) = (a, n)$ となる. よって, f は全射でもあり, したがって全単射である. ゆえに, X と $P \times \mathbb{N}_0$ は対等であり, このことから

$$|X \times \mathbb{N}_0| = |P \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0| = |P \times \mathbb{N}_0| = |X|$$

を得る. これは $\mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$ であることを意味する.

(ii) $\max X$ が存在する場合: $x = \max X$ として, その分解を $x = a+n$ $(a \in P,\ n \in \mathbb{N}_0)$ とする. X から $A = \{a, a+1, \cdots, a+n(=x)\}$ を除去して得られる部分集合を Y とする. A は有限集合, X は無限集合なので, Y は無限集合である. よって, 命題 3.10 から $\mathfrak{m} = |X| = |A \cup Y| = |Y|$ である. Y の作り方から, $\max Y$ は存在しない. ($y = \max Y$ であれば, a は y の直後であるが, a は非後続元なのでそれはあり得ない.) よって, (i) から $|Y|\aleph_0 = |Y|$ であるが, $|Y| = \mathfrak{m}$ なので, $\mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$ が従う.

(II) 一般に $1 \leq \mathfrak{n} \leq \aleph_0$ の場合は, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m}$ だから, 定理 2.11 から $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ である． □

補題 3.20. 濃度 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ のうち少なくとも一方が無限濃度ならば, $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \max\{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$ である．特に, 任意の無限濃度 $\mathfrak{m}$ について $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ である．

証明. 定理 2.12 から, $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ と仮定して一般性を失わない．仮定から, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ のうち少なくとも一方は無限濃度であるが, $\mathfrak{n}$ が無限濃度である場合には, $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ から $\mathfrak{m}$ も無限濃度なので, いずれにせよ $\mathfrak{m}$ は必ず無限濃度である．よって, 補題 3.19 から $\aleph_0\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ である．ゆえに, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}+\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m} \leq \aleph_0\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ であり, 定理 2.11 から $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ が得られる． □

補題 3.20 を繰り返し使えば, 一般に任意の無限濃度 $\mathfrak{m}$ と自然数 n に対して,

$$n\mathfrak{m} = \overbrace{\mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \cdots + \mathfrak{m}}^{n\text{ 個}} = \mathfrak{m} \tag{10}$$

であることが分かる．(最初の等号は例 2.5 による.)

▶ **演習 3.4** X を無限集合, n を自然数とするとき, X の部分集合 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ で

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset, \quad |X| = |E_i| \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たすものが存在することを示せ．(つまり, 任意の無限集合はそれ自身と対等な n 個の真部分集合らの非交和に分割できる.)

これらの補題を踏まえて, 定理 3.18 の証明を始めよう．$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ の場合を示しておけば十分である．つまり, 任意の無限濃度 $\mathfrak{m}$ について $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ であることを示せばよい．それには, 任意の無限集合 X について, $X \times X$ と X が対等であることを示せばよい．無限部分集合 $A \subseteq X$ と全単射 $f : A \times A \to A$ の組 (A, f) の全体を $\mathcal{X}$ とする．定理 3.1 から, X は可算部分集合 A を持つ．$|A \times A| = \aleph_0^2 = \aleph_0 = |A|$ なので, 全単射 $f : A \times A \to A$ が存在する．よって, $(A, f) \in \mathcal{X}$ であり, $\mathcal{X} \neq \emptyset$ である．$\mathcal{X}$ 上に次の順序 $\leq$ を導入する:

$$(A_1, f_1) \leq (A_2, f_2) \overset{\text{def}}{\iff} A_1 \subseteq A_2 \text{ でありかつ } f_2 \text{ は } f_1 \text{ の拡張である.}$$

ここで, f_2 が f_1 の拡張であるとは, 全ての $(a, b) \in A_1 \times A_1$ について $f_2(a, b) = f_1(a, b)$ であるという意味である．次の補題は, この順序 $\leq$ に対して Zorn の補題を使うための準備である．

補題 3.21. 順序 $\leq$ は帰納的である．

証明. $\{(A_i, f_i)\}_{i \in I}$ を $\mathcal{X}$ 上の空でない鎖として, これが上に有界であることを示せばいい．$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ とおく．どの A_i も無限集合なので, A も無限集合である．$a, b \in A$ とするとき, $a \in A_i$, $b \in A_j$ となる $i, j \in I$ がそれぞれ存在するが, $\{(A_i, f_i)\}_{i \in I}$ は鎖なので, 一般性を失わず $(A_i, f_i) \geq (A_j, f_j)$ であると仮定してよく, すると $a, b \in A_i$ となる．このように, どの 2 つの元 $a, b \in A$ についても, それらを共に含む A_i が存在する．(同様の議論で, 一般に A の任意の有限部分集合 A' に応じて, $A' \subseteq A_i$ となる $i \in I$ が存在することも言える.) ここで, 写像 $f : A \times A \to A$ を次の式で定める: 任意の $a, b \in A$ について,

$$f(a, b) \overset{\text{def}}{=} f_i(a, b) \in A_i \subseteq A, \quad (\text{ただし}, \ a, b \in A_i)$$

と定義する．f が単価写像であることを確かめよう．すなわち, $f(a, b) = f_i(a, b)$ の値が $a, b \in A_i$ を満たす添字 i の選び方に関係なく一意的に決まることを確かめる．$a, b \in A_i$, $a, b \in A_j$ とする．$\{(A_i, f_i)\}_{i \in I}$

は鎖なので, 一般性を失わず $(A_i, f_i) \geq (A_j, f_j)$ であると仮定できる．すると, f_i は f_j の拡張なので, $f_i(a, b) = f_j(a, b)$ である．よって, i を用いても j を用いても $f(a, b)$ は結局同じ値になる．これで写像 $f : A \times A \to A$ が単価写像として正しく定義できた．$(A, f) \in \mathcal{X}$ であることを示すために, この f が全単射であることを示そう．$(a, b), (c, d) \in A \times A$, $f(a, b) = f(c, d)$ と仮定する．$\{(A_i, f_i)\}_{i \in I}$ は鎖だから, $a, b, c, d \in A_i$ となる $i \in I$ が存在する．すると $f_i(a, b) = f(a, b) = f(c, d) = f_i(c, d)$ であるが, f_i は単射だから $(a, b) = (c, d)$ である．ゆえに, f は単射である．次に, 任意の $y \in A$ について, $y \in A_i$ となる $i \in I$ を選び, f_i が全射であることを使えば, $f_i(a, b) = y$ となる $(a, b) \in A_i \times A_i$ が存在して, $f(a, b) = f_i(a, b) = y$ となることが言える．よって, f は全射でもあり, 全単射である．したがって, $(A, f) \in \mathcal{X}$ である．A, f の構成法から明らかに, 全ての $i \in I$ について $(A_i, f_i) \leq (A, f)$ だから, (A, f) は $\mathcal{X}$ における鎖 $\{(A_i, f_i)\}_{i \in I}$ の上界である． □

この補題から, $\mathcal{X}$ と順序 $\leq$ に対して Zorn の補題を使って, $\mathcal{X}$ は順序 $\leq$ について極大元を持つことが言える．(A, f) を $\mathcal{X}$ の任意の極大元とする．f は $A \times A$ から A への全単射であり, $|A| = |A \times A| = |A|^2$ である．A は X の部分集合だから, $|A| \leq |X|$ である．

$|A| = |X|$ であることを示す．背理法を用いる．$|A| < |X|$ と仮定して, $B = X \setminus A$ とおく．$X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ だから, $|X| = |A| + |B|$ である．$|B| \leq |A|$ ならば, 補題 3.20 から $|X| = |A| + |B| = |A|$ となって仮定 $|A| < |X|$ に反する．ゆえに, $|B| \leq |A|$ ではなく, そうすると定理 2.11 から $|B| > |A|$ である．よって, 演習 2.8 から B は A と対等な部分集合 C を持っている．C は A と対等だから無限集合であり, したがって演習 3.4 から C は組ごとに交わらない 3 つの部分集合 C_1, C_2, C_3 に分割され, かつ C_1, C_2, C_3 は全て C 自身と対等である．$D = A \cup C$ とおく．$\emptyset \subsetneq C \subseteq B$, $A \cap B = \emptyset$ なので, $C \subseteq A$ ではない．よって, $A \subsetneq D$ である．第 1 巻『集合と論理』演習 4.20(2) を繰り返し使えば,

$$\begin{aligned} D \times D &= (A \cup C) \times (A \cup C) \\ &= (A \times A) \cup (A \times C) \cup (C \times A) \cup (C \times C) \end{aligned}$$

を得る．$A \cap C \subseteq A \cap B = \emptyset$ だから, 右辺に現れる 4 つの集合はどの 2 つも交わらない．$|A| = |C| = |C_1|$ なので, $|A \times C| = |A||C| = |A|^2 = |A| = |C| = |C_1|$ である．よって, 全単射 $h_1 : A \times C \to C_1$ が存在する．同じ要領で, 全単射 $h_2 : C \times A \to C_2$, $h_3 : C \times C \to C_3$ が存在することが言える．これらと f を組み合わせて, 写像 $g : D \times D \to D$ を次のように構成する: $(x, y) \in D \times D$ に対して,

$$g(x, y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in A \times A) \\ h_1(x, y) & ((x, y) \in A \times C) \\ h_2(x, y) & ((x, y) \in C \times A) \\ h_3(x, y) & ((x, y) \in C \times C). \end{cases}$$

$A \times A$, $A \times C$, $C \times A$, $C \times C$ はどの 2 つも交わらず, f, h_1, h_2, h_3 は全て全射なので,

$$\begin{aligned} g(A \times A) &= f(A \times A) = A, \\ g(A \times C) &= h_1(A \times C) = C_1, \\ g(C \times A) &= h_2(C \times A) = C_2, \\ g(C \times C) &= h_3(C \times C) = C_3 \end{aligned}$$

であり, したがって g の像は $g(D \times D) = A \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = A \cup C = D$ である．よって, g は D の上への全射である．また, $A \times A$, $A \times C$, $C \times A$, $C \times C$ はどの 2 つも交わらず, A, C_1, C_2, C_3 もどの 2 つも交わらず, かつ f, h_1, h_2, h_3 は全て単射なので, g が単射であることも分かる．よって, g は全単射であり,

$(D, g) \in \mathcal{X}$ が成り立つ．g は $A \times A$ 上では f に一致するので，g は f の拡張であり，$(A, f) \leq (D, g)$ が成り立つ．ここで，$A \subsetneq D$ なので，$(A, f) < (D, g)$ である．しかし，これは $\mathcal{X}$ における (A, f) の極大性に反する．ゆえに，背理法から $|A| = |X|$ であることが示された．よって，$|X \times X| = |X|^2 = |A|^2 = |A| = |X|$ であり，$X \times X$ と X は対等である．これで定理 3.18 の証明は完了である． □

系 3.22. $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ が 0 でない濃度であり，少なくとも一方が無限濃度ならば，$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \max\{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$ である．

証明．定理 2.12 から，$0 < \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ と仮定して一般性を失わない．仮定から $\mathfrak{m}$ は無限濃度なので，定理 3.18 から $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ である．$1 \leq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ だから，$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ である．したがって，定理 2.11 から $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$ が得られる． □

4　順序数の基礎

自然数はものの個数を数えるという機能を持っているが，それとは別にものの「順序」を数えるという機能も持っている．例えば「ABC」という文字列を見たとき，「文字が 3 個」と数えるのが前者の ‘個数を数える’ 機能であり，「A が 1 番目, B が 2 番目, C が 3 番目」のように順番をつけるのが後者の ‘順序を数える’ 機能である．個数を数える機能を無限にまで一般化した概念が，前節までに学習した濃度である．

一方で，順序を数える機能を無限にまで一般化した概念が本節で学ぶ**順序数**である．形式的には，順序数は整列集合を利用して記述される．整列集合の比較定理 (→第 4 巻『順序関係』定理 3.24) によれば，任意の整列集合 X, Y について，両者は同型であるか，一方がもう一方の切片として埋め込まれるかのいずれかである．X と Y が同型であれば，両者は同じ順番を表していると考え，X が Y の切片であれば，X が Y よりも手前の順番を表すものと考える．このように，**各々の整列集合がそれぞれ一つの ‘順番’ を表すのだが，同型な整列集合どうしは同じ数を表し，ある整列集合の切片はそれより手前の順番を表す**と考えようということである．

このアイデアを実現するいい方法がある．全ての整列集合から成る族を考えて，それを同型関係で分類して，X の同値類を $\langle X \rangle$ とする．つまり，$\langle X \rangle$ は X に同型な整列集合の全体族であるが，これを一つの順序数と見なせばいい．これではあまり ‘数’ という感じはしないが，そのこと自体は本質的な問題ではない．X と Y が同型な整列集合ならば，$\langle X \rangle = \langle Y \rangle$ だから，X と Y が表す順序数は同じである．一方，X が Y の切片になっていれば，両者は同型でないので $\langle X \rangle \neq \langle Y \rangle$ であり，$\langle X \rangle$ の方が $\langle Y \rangle$ よりも手前にあると定義しておけばよい．このような ‘機能’ の方が本質的である．

直観的なイメージとしてはこの通りだが，ここに現れる「全ての整列集合から成る族」や「X と同型な整列集合の全体族 $\langle X \rangle$」という集団は ZF 集合論では集合として扱えないほど大きすぎるという難点がある．幸いなことに，そのような ‘大きすぎる集団’ に頼らなくてもいい方法が知られている．本節では，John von Neumann の考え方に従って，「X と同型な整列集合の全体 $\langle X \rangle$」を考える代わりに，X をある意味で標準的な形式にコード化して記述するという道筋を取る．

4.1　順序数の定義

X を任意の整列集合とする．各点 $x \in X$ における X の切片を

$$X(x) = \{w \in X \mid w < x\}$$

で表す．X を標準的な形式にコード化するために, 任意の $x \in X$ に対して,

$$\mathrm{ord}(X, x) \overset{\text{def}}{=} \{\mathrm{ord}(X, w) \mid w \in X(x)\}$$

と定義される集合 $\mathrm{ord}(X, x)$ を考える.[*14] これは, 全ての $w \in X(x)$ について既に集合 $\mathrm{ord}(X, w)$ が定義されていることを前提にして集合 $\mathrm{ord}(X, x)$ を定義するという構造の超限再帰的な定義である．ただし, $\min X$ に対しては $\mathrm{ord}(X, \min X) = \emptyset$ とおく．例えば, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (順序は通常の大小順序を考える) に対しては,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}(\mathbb{N}, 1) &= \emptyset, \\
\mathrm{ord}(\mathbb{N}, 2) &= \{\mathrm{ord}(\mathbb{N}, 1)\} = \{\emptyset\}, \\
\mathrm{ord}(\mathbb{N}, 3) &= \{\mathrm{ord}(\mathbb{N}, 1), \mathrm{ord}(\mathbb{N}, 2)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
\mathrm{ord}(\mathbb{N}, 4) &= \{\mathrm{ord}(\mathbb{N}, 1), \mathrm{ord}(\mathbb{N}, 2), \mathrm{ord}(\mathbb{N}, 3)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

である．そして, 集合族

$$\mathrm{ord}\, X \overset{\text{def}}{=} \{\mathrm{ord}(X, x) \mid x \in X\} \tag{11}$$

を整列集合 X が定める**順序数**と呼ぶ．これが整列集合 X を標準コード化した記述である．順序 ‘数’ という名前とは裏腹に, その実体は一つの集合 (族) である．$\mathrm{ord}\, X$ の任意の元は $\mathrm{ord}(X, x)$ $(x \in X)$ という形式の集合であるが,

$$\mathrm{ord}(X, x) = \{\mathrm{ord}(X, w) \mid w \in X(x)\} = \mathrm{ord}\, X(x) \tag{12}$$

であり, これは切片 $X(x)$ の定める順序数である．このように, **順序数の元もまた一つの順序数である**．言い換えれば, 順序数は順序数が集まって出来ている．ちょっとややこしい．

補題 4.1. X を整列集合とする．

(1) どの $x \in X$ についても $\mathrm{ord}(X, x) \notin \mathrm{ord}(X, x)$ である．
(2) $x, x' \in X$ とする．$x \leq x'$ であるためには, $\mathrm{ord}(X, x) \subseteq \mathrm{ord}(X, x')$ であることが必要十分である．特に, $x = x' \iff \mathrm{ord}(X, x) = \mathrm{ord}(X, x')$ である．(つまり, $\mathrm{ord}(X, x)$ は x によって全て異なる.)

証明. (1) まず最初に注意. 定義から, $\mathrm{ord}(X, x)$ は全ての $w \in X(x)$ に渡る $\mathrm{ord}(X, w)$ らの集まりであるが, ここで「$x \notin X(x)$ だから $\mathrm{ord}(X, x) \notin \mathrm{ord}(X, x)$ である」と結論するのは早計である．これだけでは, 何らかの $w \in X(x)$ に対して $\mathrm{ord}(X, x) = \mathrm{ord}(X, w)$ となる可能性を排除しきれていないからである．

$\mathrm{ord}(X, x) \in \mathrm{ord}(X, x)$ となる $x \in X$ が存在すると仮定して, そのような最小の x を考える．(X は整列集合なので, そのような ‘最小’ の x は必ず存在する.) $\mathrm{ord}(X, x) \in \mathrm{ord}(X, x) = \{\mathrm{ord}(X, w) \mid w \in X(x)\}$ だから, ある $w \in X(x)$ について $\mathrm{ord}(X, x) = \mathrm{ord}(X, w)$ が成り立つ．x の最小性と $w < x$ から, $\mathrm{ord}(X, w) \notin \mathrm{ord}(X, w)$ である．一方で, $\mathrm{ord}(X, w) = \mathrm{ord}(X, x) \in \mathrm{ord}(X, x) = \mathrm{ord}(X, w)$ だから, 矛盾である．よって, どの $x \in X$ についても $\mathrm{ord}(X, x) \notin \mathrm{ord}(X, x)$ である．

(2) $x \leq x'$ とすると, $X(x) \subseteq X(x')$ なので, $\mathrm{ord}(X, x) \subseteq \mathrm{ord}(X, x')$ である．$x \nleq x'$ とする．X は全順序集合なので $x > x'$ であり, したがって $\mathrm{ord}(X, x) \supseteq \mathrm{ord}(X, x')$ である．$\mathrm{ord}(X, x') \in \mathrm{ord}(X, x)$

[*14] ord は順序を意味する order から取った記号である．

であるが, (1) から $\mathrm{ord}(X,x') \notin \mathrm{ord}(X,x')$ なので, $\mathrm{ord}(X,x) \supsetneq \mathrm{ord}(X,x')$, よって特に $\mathrm{ord}(X,x) \not\subseteq \mathrm{ord}(X,x')$ である. これの対偶から, $\mathrm{ord}(X,x) \subseteq \mathrm{ord}(X,x')$ であれば $x \leq x'$ である. □

任意の整列集合 X について, それが定める順序数 $\mathrm{ord}\,X$ のそれぞれの元は一つの集合なので, それらは集合の包含関係により順序づけられる. このように, $\mathrm{ord}\,X$ 自身もまた一つの順序集合になる. 次の命題は, $\mathrm{ord}\,X$ は X に同型な整列集合であることを示している.

命題 4.2. 任意の整列集合 X はそれが定める順序数 $\mathrm{ord}\,X$ と同型である. 特に, $\mathrm{ord}\,X$ も整列集合である.

証明. 写像 $f : X \to \mathrm{ord}\,X$ を $f(x) = \mathrm{ord}(X,x)$ で定める. $\mathrm{ord}\,X$ は全ての $x \in X$ に渡る $\mathrm{ord}(X,x)$ らの全体なので, f は全射である. 補題 4.1(2) から, f は単射かつ単調である. X は整列集合だから全順序集合であり, 第 4 巻『順序関係』演習 1.7 から f は同型である. □

これで, 式 (11) で各々の整列集合 X に対してそれを標準コード化した整列集合 $\alpha = \mathrm{ord}\,X$ が定まった. 次に確認しておくべきことは, 整列集合 X, Y が同型であるとき, かつその時に限って $\mathrm{ord}\,X = \mathrm{ord}\,Y$ だということである. それを次の命題で確認しておこう.

命題 4.3. X, Y を整列集合とする. 両者が同型であるとき, かつその時に限り, $\mathrm{ord}\,X = \mathrm{ord}\,Y$ である.

証明. $\mathrm{ord}\,X = \mathrm{ord}\,Y$ ならば, 命題 4.2 から $X \simeq \mathrm{ord}\,X = \mathrm{ord}\,Y \simeq Y$ が従う.

次は逆に, $X \simeq Y$ ならば $\mathrm{ord}\,X = \mathrm{ord}\,Y$ であることを示す. 任意の同型 $f : X \to Y$ を選ぶ. 超限再帰を用いて, 全ての $x \in X$ について $\mathrm{ord}(X,x) = \mathrm{ord}(Y,f(x))$ であることを示す. $x = \min X$ のときは, $f(x) = \min Y$ なので, $\mathrm{ord}(X,x) = \emptyset = \mathrm{ord}(Y,f(x))$ である. $x > \min X$ の場合を考える. 帰納法の仮定から, 各々の $w \in X(x)$ について $\mathrm{ord}(X,w) = \mathrm{ord}(Y,f(w))$ であるから,

$$\mathrm{ord}(X,x) = \{\mathrm{ord}(X,w) \mid w \in X(x)\} = \{\mathrm{ord}(Y,f(w)) \mid w \in X(x)\}$$

である. f は同型なので, $f(X(x)) = Y(f(x))$ である. よって,

$$\{\mathrm{ord}(Y,f(w)) \mid w \in X(x)\} = \{\mathrm{ord}(Y,y) \mid y \in Y(f(x))\} = \mathrm{ord}(Y,f(x))$$

である. ゆえに, $\mathrm{ord}(X,x) = \mathrm{ord}(Y,f(x))$ である. ここで超限帰納法は終わりである. そして f は全単射だから,

$$\mathrm{ord}\,X = \{\mathrm{ord}(X,x) \mid x \in X\} = \{\mathrm{ord}(Y,f(x)) \mid x \in X\} = \{\mathrm{ord}(Y,y) \mid y \in Y\} = \mathrm{ord}\,Y$$

である. □

X を空でない有限整列集合として, $|X| = n$ とおく. $N = \{1,2,\dots,n\}$ は通常の大小順序について整列集合である. $\phi(1) = \min X$ とおき, 以下再帰的に

$$\phi(k) = \min X \setminus \{\phi(1),\phi(2),\dots,\phi(k-1)\}, \quad k = 2,3,\dots,n$$

と定義すれば同型写像 $\phi : N \to X$ が構成できる. よって, X と N は整列集合として同型であり, 命題 4.3 から両者が定める順序数は等しい. このように, n 個の元から成る有限整列集合は全て同じ順序数を定義するが, この順序数を自然数 n で表す. $\emptyset$ が定める順序数 $0 = \mathrm{ord}\,\emptyset$ も合わせて, 有限な整列集合で定まる順序数を**有限順序数**と呼ぶが, これは実質的に 0 および自然数と同一してよいものである.

命題 4.2 で見たように, 順序数 $\alpha = \mathrm{ord}\, X$ (X は α を定める整列集合) 自身もまた一つの整列集合なので, それは順序数 $\mathrm{ord}\,\alpha$ を定めるが, α は X に同型なので, 命題 4.3 から

$$\mathrm{ord}\,\alpha = \alpha \tag{13}$$

である. これは α はそれ自身が定める順序数であるということだが, α は既に標準コード化された整列集合なので, それをさらに標準コード化しても何も変わらないということである. α の任意の元はある $x \in \alpha$ を用いて $\mathrm{ord}(\alpha, x)$ と表されるが, この元における α の切片は, 補題 4.1(2) によれば

$$\alpha(\mathrm{ord}(\alpha, x)) = \{\mathrm{ord}(\alpha, w) \mid w \in \alpha(x)\} = \mathrm{ord}\,\alpha(x) \tag{14}$$

であり, これは切片 $\alpha(x)$ が定める順序数である. このように, **順序数の切片もまた一つの順序数である**.

次の命題で示す通り, 順序数はその全ての要素を部分集合に持つという風変わりな性質を持っている.

命題 4.4. 任意の順序数 α および任意の元 $a \in \alpha$ について, $a \subseteq \alpha$ である.

証明. 式 (13) から, $\alpha = \mathrm{ord}\,\alpha$ である. $a \in \alpha$ だから, ある $x \in \alpha$ を用いて $a = \mathrm{ord}(\alpha, x)$ と書ける. a の任意の元はある $w \in \alpha(x)$ を用いて $\mathrm{ord}(\alpha, w)$ と書けるが, $w \in \alpha$ だから, $\mathrm{ord}(\alpha, w) \in \mathrm{ord}\,\alpha = \alpha$ である. ゆえに, $a \subseteq \alpha$ である. □

▶ **演習 4.1** どの順序数 α についても, $\alpha \notin \alpha$ であることを示せ.

4.2 順序数の比較

α, β を任意の順序数とする. 順序数はそれ自身が一つの整列集合なので, 整列集合の比較定理 (→第 4 巻『順序関係』定理 3.24) によれば, 両者は同型であるか, または一方がもう一方の切片に同型である. $\alpha \simeq \beta$ (同型) のときは, 命題 4.3 および式 (13) から

$$\alpha = \mathrm{ord}\,\alpha = \mathrm{ord}\,\beta = \beta$$

である. このように, **2 つの順序数が同型となるのは両者が一致する場合のみである**. α が β のある点 x における切片に同型であるときには, 切片 $\beta(x)$ もまた順序数であることに注意すれば $\alpha = \beta(x)$ が得られる. つまり, α は β の切片そのものである. したがって, どの 2 つの順序数についても, 両者は一致するか, 一方がもう一方の切片であるかのいずれかであることになる.

ここで, 任意の順序数 α, β に対して,

$$\alpha < \beta \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha \text{ は } \beta \text{ の切片である} \tag{15}$$

と定義して, $\alpha = \beta$ または $\alpha \leq \beta$ であることをまとめて $\alpha \leq \beta$ と書く. 特に, 任意の整列集合 X とその任意の元 $x \in X$ に対して

$$\mathrm{ord}\, X(x) < \mathrm{ord}\, X$$

である. どの 2 つの順序数 α, β についても, $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ のうちのちょうど一つが成り立つ. 次の命題は, ここで定義された順序数の大小関係は集合としての包含関係と同じであることを示している.

命題 4.5. α, β を任意の順序数とする. $\alpha \leq \beta$ であるためには, $\alpha \subseteq \beta$ であることが必要十分である. 特に, $\alpha < \beta$ であるためには, $\alpha \subsetneq \beta$ であることが必要十分である.

証明. (I) $\alpha \leq \beta$ とする．$\alpha = \beta$ ならばもちろん $\alpha \subseteq \beta$ である．$\alpha < \beta$ ならば, α は β の切片なので $\alpha \subsetneq \beta$ である．

(II) $\alpha \subseteq \beta$ とする．$\alpha = \beta$ であれば, 当然 $\alpha \leq \beta$ でもある．$\alpha \subsetneq \beta$ の場合を考える．$\alpha \geq \beta$ とすると, (I) から $\alpha \supseteq \beta$ となるが, これは $\alpha \subsetneq \beta$ に反するのであり得ない．よって, $\alpha < \beta$ である． □

命題 4.6. 式 (15) で定義される順序数の大小関係は全順序の公理を満たしている．

証明. 命題 4.5 から順序数の大小関係は集合としての包含関係と同じなので, それが順序の公理 (反射性, 反対称性および推移性) を満たしていることは明らかである．また, それが全順序であること (比較可能性を満たす) ことも, 整列集合の比較定理から明らかである． □

命題 4.7. α, β を任意の順序数とするとき, $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$ である．特に, 任意の順序数はそれよりも真に小さい順序数の全体である．

証明. $\alpha < \beta$ とすると, α は β の切片であるから, 式 (14) から, ある $x \in \beta$ に対して $\alpha = \operatorname{ord}\beta(x) = \operatorname{ord}(\beta, x) \in \operatorname{ord}\beta = \beta$ が成り立つ．逆に, $\alpha \in \beta$ ならば, 命題 4.4 から $\alpha \subseteq \beta$ であり, なおかつ演習 4.1 から $\alpha \neq \beta$ なので, $\alpha \subsetneq \beta$ が成り立ち, 命題 4.5 から $\alpha < \beta$ である． □

命題 4.8. Y を整列集合, X をその部分集合とするとき, $\operatorname{ord} X \leq \operatorname{ord} Y$ である．(X は Y の切片である必要はない.)

証明. 第 4 巻『順序関係』演習 3.9 から, $X \simeq Y$ であるか, X が Y の切片であるかのいずれかであるが, 前者の場合には $\operatorname{ord} X = \operatorname{ord} Y$ であり, 後者の場合には $\operatorname{ord} X < \operatorname{ord} Y$ である． □

空でないどの整列集合 X についても, $\emptyset$ は X の $\min X$ における切片だから, 命題 4.5 から $\operatorname{ord}\emptyset < \operatorname{ord} X$ が成り立つ．よって, $\emptyset$ が定める順序数 $0 = \operatorname{ord}\emptyset$ は最小の順序数である．一方で, 最大の自然数が存在しないように,「最大の順序数」も存在しない．そのことを見るために, 整列集合の連接を次の通り導入しよう．X, Y を任意の整列集合として, 直和集合 $X \sqcup Y$ (→第 1 巻『集合と論理』例 4.20) を考える．(ごく簡単に言えば, $X \sqcup Y$ は X と Y を強制的に互いに交わらないものと見なして作られる和集合である.) この上に, 次の要領で順序 $\preceq$ を導入する:

- $x, x' \in X$ に対しては, X 上で $x \leq x'$ であるとき, かつその時に限り, $x \preceq x'$ であると定める．
- 同様に, $y, y' \in Y$ に対しては, Y 上で $y \leq y'$ であるとき, かつその時に限り, $y \preceq y'$ であると定める．
- $x \in X$, $y \in Y$ に対しては, $x \preceq y$ と定義する．

$\preceq$ は $X \sqcup Y$ 上の整列順序である．これで定まる整列集合 $(X \sqcup Y, \preceq)$ を X と Y の**連接**と呼んで, これを以下 $X \oplus Y$ で表す．直観的には, $X \oplus Y$ は X の直後に Y を繋げて作られる整列集合である (図 3)．$\min X$ は $X \oplus Y$ の最小元でもある．$\max X$ が存在すれば, それは $X \oplus Y$ における $\min Y$ の直前の元である．$X \neq \emptyset$ であり, かつ $\max X$ が存在しない場合, $\min Y$ は $X \oplus Y$ では極限元 (直前の元を持たない元) である．$\max Y$ が存在するならば, それは $X \oplus Y$ の最大元でもある．$Y \neq \emptyset$ である限り, X は $X \oplus Y$ の $\min Y$ における切片であり, $X < X \oplus Y$ が成り立つ．

補足 4.9 (注意! 連接操作は非可換)　$X \oplus Y$ と $Y \oplus X$ は, 集合としてはどちらも同じ直和集合 $X \sqcup Y$ であるが, 両者は整列集合として同型であるとは限らない．例えば, $X = \mathbb{N}$ (に通常の大小順序を入れ

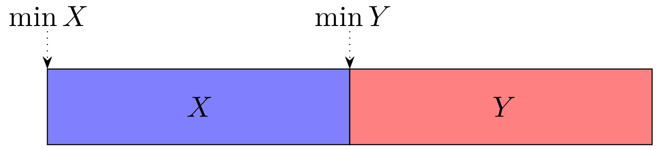

図 3　連接 $X \oplus Y$ のイメージ.

た整列集合) として, $Y = \{y\}$ を単元集合とする．このとき $X \oplus Y$ では最大元 y が存在するが, $Y \oplus X$ は最大元を持たないので, $X \oplus Y$ と $Y \oplus X$ は同型ではない．よって, $\mathrm{ord}(X \oplus Y)$ と $\mathrm{ord}(Y \oplus X)$ は異なる順序数である．これが, 後で定義される順序数の和で交換則が成立しないことの原因になる．□

命題 4.10. 任意の順序数 α に応じて, それよりも真に大きな順序数が存在する．特に,「最大の順序数」は存在しない.

証明. α を任意の順序数とする．α に属さない元 x を用意して, 連接 $X = \alpha \oplus \{x\}$ を作る．α は x における切片 $X(x)$ なので, $\alpha < \mathrm{ord}\, X$ である．□

順序数は整列されている

定理 4.11. N を順序数から成る空でない集合とするとき, $\min N$ が存在する.

証明. N に属する任意の順序数 α を選ぶ．$P = \{x \in \alpha \mid \alpha(x) \in N\}$ とおく．($\alpha(x)$ は α の切片を表している.) $P = \emptyset$ の場合を考える．β を N に属する任意の順序数とする．$\beta < \alpha$ ならば, β は α のある点 x における切片であるが, そうすると $\alpha(x) = \beta \in N$ となって $x \in P$ であることになるが, $P = \emptyset$ だからこれはあり得ない．よって, $\beta < \alpha$ ではあり得ず, $\beta \geq \alpha$ である．ゆえに, $\alpha = \min N$ である.

$P \neq \emptyset$ の場合を考える．P は α の空でない部分集合であり, α は整列集合なので, $x = \min P$ が存在する．$x \in P$ だから, $\alpha(x) \in N$ である．$\alpha(x)$ が N の最小元であることを示す．$\alpha(x) > \beta$ とすると, β はある点 $y \in \alpha(x)$ での切片 $\alpha(x)(y) = \alpha(y)$ である．$\alpha(y) = \beta \in N$ なので $y \in P$ であるが, 一方で $y \in \alpha(x)$, すなわち $y < x$ なので, これは $x = \min P$ であることに反する．よって, $\alpha(x) > \beta$ はあり得ない．ゆえに, $\alpha(x) \leq \beta$ である．したがって, $\alpha(x) = \min N$ である．□

Ω を順序数の全体とするとき, 定理 4.11 は $\leq$ が Ω 上の整列順序であることを示している．ただし, 下に示す通り, Ω は (ZF 公理系における) 集合ではない．これは「全ての集合から成る集団」のように, 集合となるには大きすぎる集団である.

Ω が集合であると仮定する．定理 4.11 から, Ω は順序 $\leq$ の下で整列集合なので, それは順序数 $\mathrm{ord}\, \Omega$ を定める．命題 4.10 から, それよりも真に大きい順序数 β が存在する．β の元は全て順序数なので, $\beta \subseteq \Omega$ であり, したがって命題 4.5 から $\beta \leq \Omega$ であるが, これは $\beta > \alpha$ であることに反する．ゆえに, Ω は集合ではない.

4.3　極限順序数と後続順序数

α を任意の順序数とする．命題 4.10 から, α よりも真に大きな順序数は必ず存在する．β を α より真に大きな順序数とする．$\alpha < \beta$ なので, α はある点 $y \in \beta$ における β の切片である．$\alpha \cup \{y\} = \alpha \oplus \{y\}$ は β 全体であるか, または点 $z = \min(\beta \setminus (\alpha \cup \{y\}))$ における切片であるかのいずれかなので, $\mathrm{ord}(\alpha \oplus \{y\}) \leq \beta$

である．したがって, $\operatorname{ord}(\alpha \oplus \{y\})$ は α より真に大きな順序数のうちで最小の順序数である．これを α の**直後**と言い, $\alpha + 1$ で表す．さらに, $\alpha + 1$ の直後 $(\alpha + 1) + 1$ のことを $\alpha + 2$ と書く．以下再帰的に, 任意の自然数 n について, $\alpha + (n - 1)$ の直後を $\alpha + n$ で表す．ただし, $\alpha + 0$ は α 自身を表す．

順序数 α に対して, α より真に小さい順序数の中で最大のものがあるとき, それを α の**直前**と呼んで $\alpha - 1$ で表す．直後 $\alpha + 1$ はどの順序数 α にも存在するが, 直前 $\alpha - 1$ は必ずしもそうではない．例えば, 最小の順序数 $0 = G_\emptyset$ には直前は存在しない．$\alpha \neq 0$ であっても直前 $\alpha - 1$ が存在しない場合もあるが (→例 4.12), そのようなとき, α は**極限順序数**であると言う．0 でも極限順序数でもない順序数, すなわち直前を持つ順序数のことを**後続順序数**と言う．順序数 α が後続順序数であるためには, それがある順序数の直後であることが必要十分であり (→演習 4.2), これが「後続順序数」という名前の意味である．

♦ **例 4.12** 自然数の全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ は通常の大小順序について整列集合である．これが定める順序数を $\omega = \operatorname{ord}\mathbb{N}$ と書く．任意の無限順序数 α を考える．$\omega > \alpha$ のとき, α は ω の切片であるが, ω の切片は全て有限集合だから[*15] α も有限集合であり, α が無限集合であることに反する．よって, $\omega > \alpha$ はあり得ず, $\omega \leq \alpha$ である．ゆえに, ω は最小の無限順序数である．

ω より真に小さい任意の順序数 β を考える．β は $\mathbb{N}$ のある切片 $\mathbb{N}(n)$ に同型であり, それは有限集合である．連接 $X = \mathbb{N}(n) \oplus \{n\}$ は $\mathbb{N}(n)$ を切片に持つ有限整列集合であり, $\beta = \operatorname{ord}\mathbb{N}(n) < \operatorname{ord} X < \omega$ である．よって, β は ω の直前ではない．したがって, ω の直前は存在せず, ω は極限順序数である．0 以外の有限順序数には直前が存在するので, それらは極限順序数ではない．(自然数 n に対して, 順序数としての直前は自然数 $n - 1$ である.) よって, ω は最小の極限順序数である．特に, 極限順序数は全て無限順序数である． □

▶ **演習 4.2** 任意の順序数 α, β について, $\beta = \alpha - 1 \iff \alpha = \beta + 1$ であることを示せ．

▶ **演習 4.3** 0 でない順序数 α が極限順序数であるためには, それが最大元を持たないことが必要十分であることを示せ．

4.4 順序数の和

集合の濃度と同様に, 順序数に対しても和, 積などの演算を定義することができる．ただし, 濃度の演算が自然数の演算と似ている部分も多かったのに対して, 順序数の演算はそれとはかなり様相が異なる．

α, β を順序数とするとき, 整列集合としての連接 $\alpha \oplus \beta$ が定める順序数を

$$\alpha + \beta \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ord}(\alpha \oplus \beta)$$

と定義する．α の直後のことを $\alpha + 1$ と書いたが, この記法はここで定義した意味での α と 1 との和に一致する．順序数の和についていろいろ考察するために, 整列集合の連接について次の補題を示しておこう．

補題 4.13. (1) 任意の整列集合 X について, $X \oplus \emptyset = \emptyset \oplus X = X$ である．

(2) 任意の整列集合 X, Y, Z について, $X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z$ である．

(3) 任意の整列集合 X, Y, X', Y' について,

$$X \simeq X' \text{ かつ } Y \simeq Y' \implies X \oplus Y \simeq X' \oplus Y'$$

である．

[*15] ω は $\mathbb{N}$ と同型であり, したがってその切片は全て有限集合である．

(4) 整列集合 X が整列集合 Y の切片に同型であるためには, 何らかの空でない整列集合 Z を用いて $Y \simeq X \oplus Z$ と書けることが必要十分である.

(5) 整列集合 X, Y について, $\mathrm{ord}\,X \leq \mathrm{ord}\,Y$ であるためには, ある整列集合 Z を用いて $X \simeq Y \oplus Z$ と書けることが必要十分である. (Z は空集合であってもよい.) 特に, $\mathrm{ord}\,X < \mathrm{ord}\,Y$ であるためには, 空でないある整列集合 Z を用いて $X \simeq Y \oplus Z$ と書けることが必要十分である.

証明. (1) これは連接の定義から明らかである.

(2) $X \oplus (Y \oplus Z)$ と $(X \oplus Y) \oplus Z$ はどちらも集合としては直和集合 $X \sqcup Y \sqcup Z$ であり, 両者の上に定義される整列順序は同じであるから, $X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z$ である.

(3) 任意の同型 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ をそれぞれ選んでおけば, $X \oplus Y$ から $X' \oplus Y'$ への同型 h が $h(x) = f(x)$ $(x \in X)$, $h(y) = g(y)$ $(y \in Y)$ によって確立できる.

(4) X が Y のある切片 $Y(y)$ と同型ならば, $Z = Y \setminus Y(y)$ は Y の空でない部分集合であり, (1) から $Y = Y(y) \oplus Z \simeq X \oplus Z$ となる. 逆に, 同型 $g : X \oplus Z \to Y$ が存在するならば, 像 $g(X)$ は Y の切片であり, かつ X はそれに同型である.

(5) $\mathrm{ord}\,X \leq \mathrm{ord}\,Y$ とする. $\mathrm{ord}\,X = \mathrm{ord}\,Y$ のとき, 命題 4.3 から $X \simeq Y$ なので, $Z = \emptyset$ に対して $Y \simeq X \oplus Z$ が成り立つ. $\mathrm{ord}\,X < \mathrm{ord}\,Y$ のときは, $X \simeq \mathrm{ord}\,X$ は $Y \simeq \mathrm{ord}\,Y$ の切片に同型だから, (4) から空でない整列集合 Z を用いて $Y \simeq X \oplus Z$ と書ける. 逆に, ある整列集合 Z を用いて $Y \simeq X \oplus Z$ と書けるとき, $Z = \emptyset$ ならば $Y \simeq X$, したがって $\mathrm{ord}\,X = \mathrm{ord}\,Y$ であり, $Z \neq \emptyset$ であれば (4) から X は Y の切片に同型なので $\mathrm{ord}\,X < \mathrm{ord}\,Y$ である. □

特に, 補題 4.13 の (1) から, 任意の順序数 α について $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ であることが分かり, (2) から順序数の和について**結合法則**

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

が成り立つことが分かる. 順序数の和について最も注意すべき点は, **交換法則が成立しない**ことである. 有限順序数に対しては, 順序数の和は (0 も含めて) 自然数の和と同じなので交換法則はそのまま成り立つ. しかし, 無限順序数が絡む場合には交換法則が崩れることがある. 補足 4.9 で述べた通り, 整列集合 X, Y に対して連接 $X \oplus Y$ と $Y \oplus X$ が同型でないことがあり, そのような場合には, 命題 4.3 から $\alpha = \mathrm{ord}\,X$ と $\beta = \mathrm{ord}\,Y$ に対して $\alpha + \beta = \mathrm{ord}(X \oplus Y) \neq \mathrm{ord}(Y \oplus X) = \beta + \alpha$ である.

♦ 例 4.14 最小の極限順序数 $\omega = \mathrm{ord}\,\mathbb{N}$ を考える. $\omega + 1$ は ω の直後であり, 連接 $X = \mathbb{N} \oplus \{\infty\}$ が定める順序数 $\mathrm{ord}\,X$ である. (ここで, ∞ は $\mathbb{N}$ に属さない 1 点である.) 一方, $1 + \omega$ は連接 $Y = \{0\} \oplus \mathbb{N}$ が定める順序数 $\mathrm{ord}\,Y$ である. Y は $\mathbb{N}$ 自身と同型である. ($0 \mapsto 1$, $n \mapsto n + 1$ が同型 $Y \to \mathbb{N}$ を与えている.) よって, $1 + \omega = \mathrm{ord}\,Y = \mathrm{ord}\,\mathbb{N} = \omega$ である. もちろん, このことは $1 = 0$ を意味しない. X 上で $\mathbb{N}$ は ∞ における切片 $X(\infty)$ なので, $\omega < \mathrm{ord}\,X = \omega + 1$ である. よって, $1 + \omega = \omega < \omega + 1$ である. □

この例で述べたように, $1 + \omega = \omega$ なので, このことを繰り返し用いれば, 一般に任意の有限順序数 n に対して $n + \omega = \omega < \omega + 1$ であることが分かる. 特に, 任意の有限順序数 m, n に対して $m + \omega = \omega = n + \omega$ であるが, このことから一般には

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \implies \alpha = \beta$$

は**成立しない**し,

$$\alpha < \beta \implies \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

も**成立しない**ことが分かる．

命題 4.15. α, β, γ を順序数とする．

(1) $\beta \leq \gamma$ ならば, $\alpha+\beta \leq \alpha+\gamma$ である．
(2) $\beta < \gamma \iff \alpha+\beta < \alpha+\gamma$ である．
(3) $\beta \leq \gamma$ ならば, $\beta+\alpha \leq \gamma+\alpha$ である．

この命題を見て, 主張 (1) と主張 (3) は同じだと思われるかも知れないが, 先に述べた通り順序数の和は一般に交換則を満たさないので, (1) と (3) は同じ主張ではない．また, 上で注意した通り, (3) では等号を省いた主張 $\beta < \gamma \Rightarrow \beta+\alpha < \gamma+\alpha$ は成り立つとは限らない．

証明. (1) $\beta \leq \gamma$ とする．$\beta = \gamma$ ならば, $\alpha+\beta = \alpha+\gamma$ である．$\beta < \gamma$ の場合, β は γ の切片であり, 空でないある整列集合 X を用いて $\gamma \simeq \beta \oplus X$ と書けるから, $\alpha \oplus \beta$ は $\alpha \oplus \gamma \simeq \alpha \oplus \beta \oplus X$ の切片に同型であり, $\alpha+\beta < \alpha+\gamma$ が成り立つ．

(2) $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha+\beta < \alpha+\gamma$ であることは (1) の議論で示されている．(1) から, $\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha+\beta \geq \alpha+\gamma$ であるから, これの対偶から, $\alpha+\beta < \alpha+\gamma \Rightarrow \beta < \gamma$ である．

(3) $\beta = \gamma$ ならば $\beta+\alpha = \gamma+\alpha$ である．$\beta < \gamma$ とする．補題 4.13(5) から, 空でないある整列集合 X を用いて $\gamma \simeq \beta \oplus X$ と書ける．補題 4.13(3) から $\gamma \oplus \alpha \simeq \beta \oplus X \oplus \alpha$ なので, 命題 4.3 から

$$\gamma+\alpha = \mathrm{ord}(\gamma \oplus \alpha) = \mathrm{ord}(\beta \oplus X \oplus \alpha) \geq \mathrm{ord}(\beta \oplus \alpha) = \beta+\alpha$$

である．ここで, 最後の不等号 $\geq$ は命題 4.8 による． □

▶ **演習 4.4** α, β, γ を順序数とする．

(1) $\alpha+\beta \leq \alpha+\gamma$ ならば, $\beta \leq \gamma$ であることを示せ．
(2) $\alpha+\beta = \alpha+\gamma$ ならば, $\beta = \gamma$ であることを示せ．

▶ **演習 4.5** α, β を順序数とするとき, 次のことをそれぞれ証明せよ．

(1) $\alpha \leq \beta$ ならば, $\alpha+\gamma = \beta$ を満たす順序数 γ が唯一つ存在する．
(2) $\alpha < \beta$ であるためには, $\alpha+\gamma = \beta$ を満たす順序数 $\gamma > 0$ が存在することが必要十分である．

▶ **演習 4.6** α を順序数, β を極限順序数とするとき, 次のことをそれぞれ証明せよ．

(1) $\alpha+\beta$ は極限順序数である．
(2) $\alpha+\beta = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma < \beta\}$ である．

4.5 順序数の積

次に, 順序数の積を考える．X, Y を整列集合とする．直積集合 $X \times Y$ は次の順序 $\preceq$ の下で整列集合になる:

$$(x, y) \preceq (x', y') \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} y < y' \text{ または} \\ y = y' \text{ かつ } x \leq x'. \end{cases}$$

これは $X \times Y$ 上の整列順序であり, 第 4 巻『順序関係』例 1.4(2) で述べた辞書式順序とほぼ同じであるが, ここでは Y-成分の方から先に比較しているという些細な違いがある．以下, 整列集合の直積集合 $X \times Y$ に

は常にこの Y-成分から先に比較する整列順序が設定されているものと仮定する．X と Y の元がそれぞれ $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, $y_0 < y_1 < y_2 < \cdots$ と整列されているとき, $X \times Y$ の元は辞書式順序の下で

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_0) < (x_2, y_0) < \cdots < (x_0, y_1) < (x_1, y_1) < (x_2, y_1) < \cdots < (x_0, y_2) < (x_1, y_2) < \cdots$$

のように整列される．この辞書式順序を踏まえて, 任意の順序数 α, β に対して,

$$\alpha\beta \overset{\text{def}}{\equiv} \operatorname{ord}(\alpha \times \beta)$$

と定める．この定義から, α, β が共に有限順序数であれば, 積 $\alpha\beta$ は普通の意味での自然数 (0 も含める) の積と同じである．

補題 4.16. (1) 任意の整列集合 X, Y, X', Y' について,

$$X \simeq X' \text{ かつ } Y \simeq Y' \implies X \times Y \simeq X' \times Y'$$

である．

(2) 任意の整列集合 X について, $X \times \emptyset = \emptyset \times X = \emptyset$ である．

(3) 任意の整列集合 X について, $X \times \{1\} \simeq X \simeq \{1\} \times X$ である．

(4) 任意の整列集合 X, Y, Z について, $(X \times Y) \times Z \simeq X \times (Y \times Z)$ である．

(5) 任意の整列集合 X, Y, Z について, $X \times (Y \oplus Z) = (X \times Y) \oplus (X \times Z)$ である．

証明. (1) 任意の同型 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ をそれぞれ選んでおくと, $X \times Y$ から $X' \times Y'$ への同型が $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ で構成できる．

(2) これは明らかである．

(3) $x \mapsto (x, 1)$ と $x \mapsto (1, x)$ がそれぞれ同型 $X \simeq \{1\} \times X$, $X \simeq \{1\} \times X$ を与える．

(4) 自然な全単射 $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$ が同型 $(X \times Y) \times Z \simeq X \times (Y \times Z)$ を与えている．

(5) $X \times (Y \oplus Z)$ は集合としては直積 $X \times (Y \sqcup Z)$ であり, これは $X \times Y$ と $X \times Z$ の直和であるから, 集合としては $X \times (Y \oplus Z)$ と $(X \times Y) \oplus (X \times Z)$ はどちらも同じである．そして, そのどちらにおいても設定されている整列順序は同じものである．ゆえに, $X \times (Y \oplus Z) = (X \times Y) \oplus (X \times Z)$ である． □

補題 4.16(2) から, 任意の順序数 α に対して $0\alpha = \alpha 0 = 0$ であり, (3) から $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$ である．さらに, $\alpha \times \beta = \emptyset$ であるのは $\alpha = \emptyset$ または $\beta = \emptyset$ のときだけであり, その時に限って $\alpha\beta = 0$ となるので, $\alpha, \beta \neq 0$ であれば $\alpha\beta \neq 0$ である．補題 4.16(4) から, 順序数の積についても**結合法則**

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

が成り立つことが分かる．さらに, 補題 4.16(5) から, **左分配法則**

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

が成り立つことも言える．この辺りまでは, 自然数の積と違うところはない．しかし, それもここまでで, 和の場合と同じく順序数の積についても自然数の積とは全く様相が違うところが出てくる．まず, 順序数の積についても**交換法則は成立しない**.

♦ **例 4.17** 最小の極限順序数 $\omega = \mathrm{ord}\,\mathbb{N}$ を考える．$\omega 2$ は整列集合 $X = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ が定める順序数 $\mathrm{ord}\,X$ である．一方, 2ω は整列集合 $Y = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ が定める順序数 $\mathrm{ord}\,Y$ である．X, Y をそれぞれ具体的に書けば,

$$X : (1, 0) < (2, 0) < (3, 0) < \cdots < (1, 1) < (2, 1) < (3, 1) < \cdots$$
$$Y : (0, 1) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < (0, 3) < (1, 3) < \cdots$$

である．Y では最小元 $(0, 1)$ を除くどの元にもその直前の元があるが, X では $(1, 1)$ に直前の元はない．よって, X と Y は同型ではなく, $\omega 2 = \mathrm{ord}\,X \neq \mathrm{ord}\,Y = 2\omega$ である．この例では, Y は $\mathbb{N}$ と同型であり, それは X における $(1, 1)$ の切片と同型なので, $\omega 2 = \mathrm{ord}\,X < \mathrm{ord}\,Y = 2\omega = \omega$ が成り立つ． □

▶ **演習 4.7** 任意の自然数 n と任意の順序数 α について,

$$\overbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}^{n\text{ 個}} = \alpha n$$

であることを示せ．

演習 4.7 から, $\omega + \omega = \omega 2$ であるが, 上の例 4.17 で見たように $2\omega \neq \omega 2$ なので, $\omega + \omega \neq 2\omega$ である．

順序数の積については左分配法則が成り立つが, その一方で次の演習 4.8 に示す通り, **順序数については一般に右分配則** $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$ **が成り立つとは限らない**．

▶ **演習 4.8** $(\beta + \gamma)\alpha \neq \beta\alpha + \gamma\alpha$ となる具体的事例を示せ．

命題 4.18. α, β, γ を順序数とする．

(1) $\beta \leq \gamma$ ならば, $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$ である．

(2) $\alpha > 0$ のとき, $\beta < \gamma \iff \alpha\beta < \alpha\gamma$ である．

(3) $\alpha > 0$ かつ $\alpha\beta = \alpha\gamma$ ならば, $\beta = \gamma$ である．

証明．(1) $\beta \leq \gamma$ とする．$\beta = \gamma$ ならば, $\beta\alpha = \gamma\alpha$ である．また, $\alpha = 0$ のときには $\beta\alpha = 0 = \gamma\alpha$ である．$\alpha > 0$, $\beta < \gamma$ のときを考える．補題 4.13(4) から, 空でないある整列集合 X を用いて $\gamma \simeq \beta \oplus X$ と書ける．補題 4.16 の (1) と (5) から

$$\alpha \times \gamma \simeq \alpha \times (\beta \oplus X) = (\alpha \times \beta) \oplus (\alpha \times X)$$

であり, したがって $\alpha \times \beta$ は $\alpha \times \gamma$ の切片に同型である．ゆえに, $\alpha\beta < \alpha\gamma$ である．

(2) $\alpha > 0$ とする．$\beta < \gamma \Rightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma$ であることは (1) の議論で示されている．$\beta \geq \gamma$ ならば, 演習 4.5(1) から $\beta = \gamma + \delta$ を満たす順序数 δ が存在するので, 左分配則から $\alpha\beta = \alpha(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta \geq \alpha\gamma$ が成り立つ．これの対偶から, $\alpha\beta < \alpha\gamma \Rightarrow \beta < \gamma$ であることが分かる．

(3) これは (2) から明らかである． □

次の定理は, 順序数についても整数と同じような「余りのある除法」ができることを示している．

定理 4.19. α, β を順序数, $\beta \neq 0$ とするとき, $\alpha = \beta\delta + \gamma$, $\gamma < \beta$ を満たす順序数の組 (δ, γ) が唯一つ存在する．

証明．まず (δ, γ) の存在を示す．順序数 λ を $\alpha < \beta\lambda$ となるように選ぶ．(例えば, $\lambda = \alpha + 1$ としておけばよい．$\beta \geq 1$ なので, 命題 4.18(1) から $\beta\lambda \geq \lambda = \alpha + 1 > \alpha$ である．) $\alpha < \beta\lambda$ だから, α は $\beta \times \lambda$

のある点 $(y_0, z_0) \in \beta \times \lambda$ における切片と同型である．すると，

$$A = \{(y,z) \in \beta \times \lambda \mid z < z_0\} = \beta \times \lambda(z_0),$$
$$B = \{(y,z) \in \beta \times \lambda \mid y < y_0,\ z = z_0\} = \beta(y_0) \times \{z_0\} \simeq \beta(y_0)$$

とおくと，$\alpha = A \oplus B$ である．よって，

$$\alpha = \operatorname{ord}(A \oplus B) = \operatorname{ord} A + \operatorname{ord} B = \operatorname{ord}(\beta \times \lambda(z_0)) + \operatorname{ord} \beta(y_0) = \beta \operatorname{ord} \lambda(z_0) + \operatorname{ord} \beta(y_0)$$

であり，$\delta = \operatorname{ord} \lambda(z_0)$, $\gamma = \operatorname{ord} \beta(y_0)$ とおくと，$\alpha = \beta\delta + \gamma$ が成り立つ．そして，$\gamma = \operatorname{ord} \beta(y_0) < \beta$ である．

一意性を示す．$\alpha = \beta\delta + \gamma$, $\alpha = \beta\delta' + \gamma'$ $(\gamma, \gamma' < \beta)$ を 2 通りの分解とする．命題 4.6 から順序数の大小関係は全順序なので，一般性を失わず $\delta \leq \delta'$ であると仮定してよい．演習 4.5(1) から，$\delta' = \delta + \varepsilon$ を満たす順序数 ε が存在する．左分配則を用いて，

$$\beta\delta + \gamma = \alpha = \beta\delta' + \gamma' = \beta(\delta + \varepsilon) + \gamma' = \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma'$$

となるから，演習 4.4(2) から $\gamma = \beta\varepsilon + \gamma'$ である．ここで $\varepsilon \geq 1$ ならば，$\gamma = \beta\varepsilon + \gamma' \geq \beta\varepsilon \geq \beta$ となる．(最後の $\geq$ は命題 4.18(2) から成り立つ.) しかし，これは $\gamma < \beta$ に反する．よって，$\varepsilon = 0$ であり，$\gamma = \gamma'$ が従う．さらに，

$$\beta\delta \leq \beta\delta + \gamma = \alpha = \beta\delta' + r < \beta\delta' + \beta = \beta(\delta' + 1)$$

である．(最後の不等号 $<$ は命題 4.15(2) から，最後の等号は左分配則から，それぞれ成り立つ.) ここで，$\beta > 0$ だから，命題 4.18(2) から $\delta < \delta' + 1$, すなわち $\delta \leq \delta'$ が成り立つ．対称的な議論で $\delta \geq \delta'$ も得られるから，$\delta = \delta'$ も成り立つ．これで一意性が言えた． □

▶ **演習 4.9**　α, β, γ を任意の順序数とする．

(1) $\beta \leq \gamma$ ならば，$\beta\alpha \leq \gamma\alpha$ であることを示せ．
(2) $\alpha > 0$ かつ $\beta\alpha = \gamma\alpha$ ならば $\beta = \gamma$ であると言えるか?

▶ **演習 4.10**　α を 0 でない順序数，β を極限順序数とする．

(1) $\alpha\beta$ は極限順序数であることを示せ．
(2) $\alpha\beta = \sup\{\alpha\gamma \mid \gamma < \beta\}$ であることを示せ．

▶ **演習 4.11**　α, β を任意の順序数とする．$\alpha + \beta = \beta$ であるためには，$\alpha\omega \leq \beta$ であることが必要十分であることを示せ．

4.6　濃度と順序数

本巻の最後に，集合の濃度と順序数について補足的な話をしておこう．

濃度と順序数はそれぞれ自然数が持つ「個数を数える」「順番を数える」という機能を拡張した概念であるが，集合の濃度がそれぞれの**集合**から決まる量であることに対して，順序数は**整列構造**から決まる量だという大きな違いがある．第 4 巻『順序関係』例 3.30 で見たように，同じ集合 X 上で定義される 2 つの整列順序 $\leq, \leq'$ に対して $(X, \leq)$ と $(X, \leq')$ が順序集合として同型でないということが，X が無限集合の場

合には起こり得るが, そのような場合には, 命題 4.3 から $\mathrm{ord}(X, \leq)$ と $\mathrm{ord}(X, \leq')$ は異なる順序数である. $(X, \leq)$ と $(X, \leq')$ は順序を無視して単なる集合と見ればどちらも X なので, 同じ濃度を定める. しかし, 両者は整列集合としては異なる順序数を定める.

さて, 集合 X の濃度とは X が持つ元の個数を表す概念だったが, 第 2 節では X の濃度 $|X|$ の実体が何かということについては何も触れずに議論した. ここでは, 順序数の考え方を利用すれば, 個々の集合 X に対してその濃度 $|X|$ に実体を与えることができることを見ておこう. 結論だけを先に言っておけば, $|X|$ は X 上で定義されうる '最小' の順序数として実体化されるということである.

任意の集合 X について, その上の整列順序の全体を $\mathcal{C}(X)$ で表す. X 上の二項関係は $X \times X$ の部分集合, すなわち冪集合 $2^{X \times X}$ の元である. よって, X 上の全ての二項関係から成る集合は冪集合 $2^{X \times X}$ に一致するが, $\mathcal{C}(X)$ はその部分集合である. (だから, $\mathcal{C}(X)$ は '大きすぎる集団' ではない.) さらに, 整列可能定理 (→第 4 巻『順序関係』定理 3.6) を前提にすれば, $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ である. そこで, 全ての整列順序 $R \in \mathcal{C}(X)$ に渡る順序数 $\mathrm{ord}(X, R)$ を考えると, 定理 4.11 からそれらの順序数の中で最小の順序数が存在する. その最小順序数を X の**基数**と呼び, それを $\mathrm{card}\, X$ で表す. そして, $\mathrm{card}\, X$ を実現する整列順序 R, すなわち $\mathrm{card}\, X = \mathrm{ord}(X, R)$ を満たす整列順序 R を X の**最小整列順序**と呼ぶことにする. このような R は一般に X に応じて一意的ではないが, 基数 $\mathrm{card}\, X$ 自体は X から一意的に決まる順序数である.

以上, ややまわりくどい話になったが, 要するに X 上で実現することができる最小の順序数が $\mathrm{card}\, X$ である. $\mathrm{card}\, X$ はそれぞれの集合 X に対して定まる '数量' であるが, もちろん X が無限集合のときにはそれは自然数には収まらない数である. なお, この話は全ての集合 X が必ず整列できること, すなわち整列可能定理が成り立つことを前提にしているので, 選択公理を認めた場合にのみ通用する.

次の命題は, 基数が濃度の役割を果たすことを示している. 要するに, 任意の集合 X について, それの基数 $\mathrm{card}\, X$ のことをそのまま濃度 $|X|$ だと考えればいいということである.

命題 4.20. X, Y を集合とする. X と Y が対等であるためには, $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ であることが必要十分である.

証明. X と Y が対等であると仮定して, 任意の全単射 $f : X \to Y$ を選んでおく. R_Y を Y 上の最小整列順序とする. f を通して, R_Y から X 上の整列順序 R を次のように作ることができる:

$$(x, x') \in R \overset{\text{def}}{\iff} (f(x), f(x')) \in R_Y.$$

つまり, R は f が同型となるように作られている. 基数の定義から, $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{ord}(X, R)$ である. そして, f は (X, R) と (Y, R_Y) との間の同型だから, $\mathrm{ord}(X, R) = \mathrm{ord}(Y, R_Y) = \mathrm{card}\, Y$ である. ゆえに, $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}\, Y$ である. X と Y の立場を入れ替えて同様に議論すれば, $\mathrm{card}\, X \geq \mathrm{card}\, Y$ であることも言える. よって, $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ である.

逆に, $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ とすると, X, Y 上にそれぞれの最小整列順序を設定しておけば, $\mathrm{ord}\, X = \mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y = \mathrm{ord}\, Y$ となるので, 命題 4.3 から X と Y は整列集合として同型であり, したがって特に両者を結ぶ全単射が存在するので, X と Y は対等である. □

基数は順序数のうちの特別なものだが, 順序数が何らかの集合に対する基数になっているかどうかは, 次の命題に照らせば判断できる. 要するに, 順序数 α が基数であるのは, α がそれと対等な集合上で実現され得る最小の順序数であるときであって, かつその時に限られるということである.

命題 4.21. 順序数 α が基数であるためには, $\beta < \alpha$ を満たす全ての順序数 β に対して $|\beta| < |\alpha|$ であることが必要十分である.

ここで, $|\beta| < |\alpha|$ は単射 $\beta \to \alpha$ は存在するが全単射 $\beta \to \alpha$ は存在しないという意味である.

証明. α がある集合 C の基数であると仮定して, C 上には $\alpha = \mathrm{ord}(C, R)$ を満たす最小整列順序 R が設定されているとする. $\beta < \alpha$ を満たす任意の順序数 β を考える. β は α の切片なので, $|\beta| \leq |\alpha|$ である. ここで, $|\beta| = |\alpha|$ であると仮定すると, β は集合として α と対等であり, したがって C とも対等である. (α と C は順序集合として同型であり, したがって両者は対等である.) 任意の全単射 $\phi : C \to \beta$ を取り, β 上の整列順序を R_β として

$$S = \{(x, y) \in C^2 \mid (\phi(x), \phi(y)) \in R_\beta\}$$

とおくと, S は C 上の整列順序であり, なおかつ ϕ は順序同型である. よって, $\mathrm{ord}(C, S) = \mathrm{ord}\,\beta = \beta < \alpha = \mathrm{ord}(C, R)$ であるが, これは R が C 上の最小整列順序であることに反する. ゆえに, $|\beta| < |\alpha|$ である.

逆に, $\beta < \alpha$ を満たす全ての順序数 β について $|\beta| < |\alpha|$ であると仮定する. α は整列集合であるが, そこに設定されている整列順序を R とする. つまり, $\alpha = \mathrm{ord}(\alpha, R)$ である. R が α 上の最小整列順序であることを示す. S を集合としての α 上の任意の整列順序とする. $\mathrm{ord}(\alpha, S) < \mathrm{ord}(\alpha, R) = \alpha$ と仮定すると, 仮定から矛盾 $|\alpha| < |\alpha|$ が起こるので, $\mathrm{ord}(\alpha, S) \geq \mathrm{ord}(\alpha, R)$ である. よって, R は α 上の最小順序数である. したがって, $\alpha = \mathrm{ord}(\alpha, R)$ は集合 α の基数である. □

♦ **例 4.22** $\omega = \mathrm{ord}\,\mathbb{N}$ を最小の無限順序数とするとき, これは $\mathbb{N}$ の基数になっている. (そして, これが可算濃度 α_0 のことを表していると考えてよい.) 一方で, $\omega + 1$ は可算な整列集合 $\mathbb{N} \oplus \{1\}$ が定める順序数であるが, 同じく可算な整列集合 $\mathbb{N}$ が定める順序数 ω よりも真に大きいので, 命題 4.21 から $\omega + 1$ は基数ではない. □

付録 A　演習問題解答例

ここに示されているのはあくまで解答の一例であり，これだけが唯一絶対の正しい解答というわけではない．参考程度の略解という位置付けである．

演習 1.1.　(1) $|A \setminus B| = k$, $A \cap B = l$, $|B \setminus A| = m$ とする (図 4(1))．A は $A \setminus B$ と $A \cap B$ の非交和なので，$|A| = k + l$ である．同じく，B は $B \setminus A$ と $A \cap B$ の非交和なので，$|A| = m + l$ である．$A \cup B$ は $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ の非交和だから，

$$|A \cup B| = k + l + m = (k + l) + (m + l) - l = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

(2) $D = A \cup B$ とおくと，(1) と分配則から

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |D \cup C| \\
&= |D| + |C| - |C \cap D| \\
&= |A \cup B| + |C| - |C \cap (A \cup B)| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

あるいは，図 4(2) のように 7 つの領域を考えて，(1) と同じように議論してもよい．□

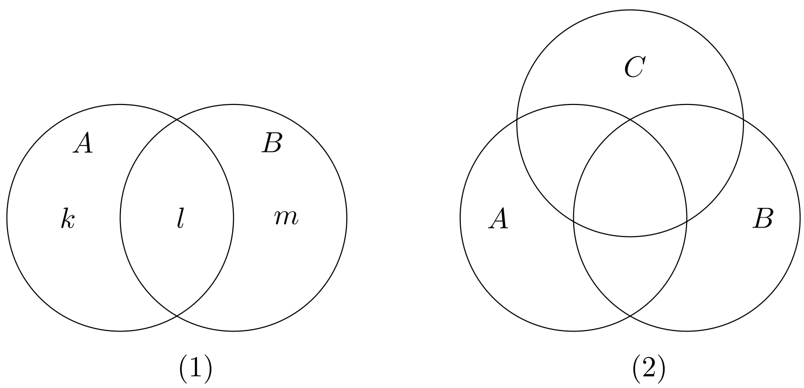

図 4　演習 1.1.

演習 2.1.　$h(a_1, b_1) = h(a_2, b_2)$ と仮定すると，$(f(a_1), g(b_1)) = (f(a_2), g(b_2))$ なので $f(a_1) = f(a_2)$, $g(b_1) = g(b_2)$ であるが，f, g はそれぞれ単射なので $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ である．よって，h は単射である．f, g は全射だから，任意の $a' \in A'$, $b' \in B'$ に応じて，それぞれ $a' = f(a)$, $b' = g(b)$ となる $a \in A$, $b \in B$ が存在する．そして $h(a, b) = (f(a), g(b)) = (a', b')$ となるから，h は全射でもある．□

演習 2.2.　(i) 和の定義については，$|A| = |A'|$ かつ $|B| = |B'|$ かつ $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ ならば必ず $|A \cup B| = |A' \cup B'|$ であることを確かめればよい．任意の全単射 $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ を固定する．写像 $h : A \cup B \to A' \cup B'$ が次の式で定まる: $x \in A \cup B$ に対して

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & (x \in A) \\ g(x) & (x \in B). \end{cases}$$

(注意: $A \cap B = \emptyset$ なので, x は A か B のうちちょうど一方にのみ属する．さらに, $f(x) \in A'$, $g(x) \in B'$ なので, $h(x) \in A' \cup B'$ である.) $x, y \in A \cup B$, $h(x) = h(y)$ とする．$x \in A$ ならば, $h(y) = h(x) = f(x) \in A'$ なので $y \in A$ でもある．($y \in B$ ならば $h(y) = g(y) \in B'$ であり, $A' \cap B' = \emptyset$ なので, $h(y) \in A'$ とはならない.) よって, $f(y) = h(y) = h(x) = f(x)$ であるが, f は単射だから $y = x$ である．同様にして, $x \in B$ ならば $y \in B$ でもあり, $g(y) = h(y) = h(x) = g(x)$ と g の単射性から $y = x$ が得られる．ゆえに, h は単射である．$z \in A' \cup B'$ とする．$z \in A'$ であるとき, f の全射性から $f(x) = z$ となる $x \in A$ が存在して, $h(x) = f(x) = z$ となる．同じく $z \in B'$ であるとき, g の全射性から $g(y) = z$ となる $y \in B$ が存在して, $h(y) = g(y) = z$ となる．よって, h は全射でもある．

(ii) べき乗の定義については, $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ ならば必ず $|B^A| = |B'^{A'}|$ であることを確かめればよい．任意の全単射 $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ を固定して考える．任意の写像 $\pi \in B^A$ に対して, 写像 $\pi^h \in B'^{A'}$ を次の図式で定める:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A' \arrow[r, "\pi^h"'] & B'.
\end{tikzcd}
$$

つまり, $\pi^h = g \circ \pi \circ f^{-1}$ である．これで写像 $h : B^A \to B'^{A'}$ $(\pi \mapsto \pi^h)$ が定まった．$\pi, \pi' \in B^A$, $\pi^h = \pi'^h$ とすると, $g \circ \pi \circ f^{-1} = g \circ \pi' \circ f^{-1}$ であるが, 左から g^{-1} を, 右から f をそれぞれ合成すれば $\pi = \pi'$ が得られる．よって, h は単射である．任意の $\lambda \in B'^{A'}$ に対して $\pi = g^{-1} \circ \lambda \circ f$ とおくと, π は A から B への写像であり (つまり $\pi \in B^A$ であり), $\pi^h = g \circ \lambda \circ f^{-1} = g \circ (g^{-1} \circ \lambda \circ f) \circ f^{-1} = (g \circ g^{-1}) \circ \lambda \circ (f \circ f^{-1}) = \lambda$ となる．ゆえに, h は全射でもある．□

演習 2.3.　任意の $f \in B^A$ に対して, $X = \mu(f) = f^{-1}(1)$ とおく．任意の $a \in A$ について, $\chi_X(a) = 1 \iff a \in X \iff f(a) = 1$ だから, $f = \chi_X$ である．これは $\chi \circ \mu = \epsilon_{B^A}$ であることを示している．逆に, $X \subseteq A$, $f = \chi_X$ とおくと, 任意の $a \in A$ について, $a \in X \iff \chi_X(a) = 1 \iff f(a) = 1 \iff a \in f^{-1}(1) \iff a \in \mu(f)$ なので, $X = \mu(f)$ である．これは $\mu \circ \chi = \epsilon_{2^A}$ を意味する．□

演習 2.4.　写像 $g : A \times I \to U$ を $(a, i) \mapsto f_i^{-1}(a)$ で定める．これが f の逆写像であることを示せばよい．$a \in U$ とすると, $f(a) = (f_{i_a}(a), i_a)$ なので, $g(f(a)) = g(f_{i_a}(a), i_a) = f_{i_a}^{-1}(f_{i_a}(a)) = a$ である．よって, $g \circ f = \epsilon_U$ である．任意の $(a, i) \in A \times I$ について, $x = g(a, i) = f_i^{-1}(a)$ とおくと, $x \in A_i$, $i = i_x$ であり, $f(g(a, i)) = f(x) = (f_{i_x}(x), i_x) = (f_i(x), i) = (a, i)$ となる．ゆえに, $f \circ g = \epsilon_{A \times I}$ である．□

演習 2.5.　A, B, C をそれぞれ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ を表す集合とする．これらは組ごとに交わらないと仮定してよい．$(\mathfrak{m}^\mathfrak{n})^\mathfrak{p}$ は C から A^B への写像の全体集合 $(A^B)^C$ の濃度であり, $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}$ は直積 $B \times C$ から A への写像の全体集合 $A^{B \times C}$ の濃度である．これら 2 つの集合が対等であることを示せばよい．

任意の $f \in (A^B)^C$ を考える．これは C から A^B への写像なので, 任意の $c \in C$ について, $f_c \in A^B$ は B から A への写像である．そこで, $f^\mu : B \times C \to A$ を $(b, c) \mapsto f_c(b)$ で定めることができる．これで写像 $\mu : (A^B)^C \to A^{B \times C}$ $(f \mapsto f^\mu)$ が定まった．これが全単射であることを示す．$f, g \in (A^B)^C$, $f^\mu = g^\mu$ とする．任意の $c \in C$ を考える．$f_c(b) = f^\mu(b, c) = g^\mu(b, c) = g_c(b)$ が全ての $b \in B$ について言えるので, $f_c = g_c$ である．これが全ての $c \in C$ で成り立つから, $f = g$ である．ゆえに, μ は単射である．$g \in A^{B \times C}$ とする．任意の $c \in C$ について, 写像 $f_c : B \to A$ を $b \mapsto g(b, c)$ で定めることができる．そこで, c に対して f_c を対応付けることで写像 $f : C \to A^B$ が定まる．$f^\mu(b, c) = f_c(b) = g(b, c)$ だから, $g = f^\mu$ である．よって, μ は全射でもある．□

演習 2.6.　f の終域を像 $f(X)$ に制限した写像 $\hat{f} : X \to f(X)$ は全射なので, 命題 2.10 から $|f(X)| \leq |X|$ である. 特に, f が単射であれば, $\hat{f}$ も単射, したがって全単射なので, $|X| = |f(X)|$ である.

$|f(X)| = |X|$ であっても f が単射であるとは限らない例を示す. 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x/2 & (x \text{ が偶数}) \\ x & (x \text{ が奇数}) \end{cases}$$

とおく. f は全射であり, $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ である. だから, 当然 $|f(\mathbb{Z})| = |\mathbb{Z}|$ であるが, $f(2) = 1 = f(1)$ なので, f は単射ではない. □

演習 2.7.　$|A| = \mathfrak{m}$, $|B| = \mathfrak{n}$, $|C| = \mathfrak{p}$ となる任意の集合 A, B, C を考える.

(1) 恒等写像 $A \to A$ は単射なので, $\mathfrak{m} = |A| \leq |A| = \mathfrak{m}$ である.

(2) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{p}$ だから, 単射 $f : A \to B$, $g : B \to C$ が存在する. 合成 $g \circ f : A \to C$ も単射であるから, $\mathfrak{m} = |A| \leq |C| = \mathfrak{p}$ である. □

演習 2.8.　A, B をそれぞれ濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ を表す集合であるとする. $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ であれば, 定義から単射 $f : A \to B$ が存在するが, このとき像 $f(A)$ は B の部分集合であり, A と同じ濃度 $\mathfrak{m}$ を持つ. (f の終集合を $f(A)$ に制限した写像 $A \to f(A)$ は全単射なので, $|f(A)| = |A| = \mathfrak{m}$ である.) 逆に, $A \subseteq B$ であれば, 包含写像 $e : A \to B$ $(x \mapsto x)$ が定まるが, これは単射なので, 定義 2.9 から $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ である. □

演習 2.9.　以下, $\mathfrak{m} = |A|$, $\mathfrak{m}' = |A'|$, $\mathfrak{n} = |B|$, $\mathfrak{n}' = |B'|$ であるとする. これらの集合は組ごとに交わらないと仮定できる. $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{n}'$ なので, それぞれ単射 $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ が存在する.

(1) 写像 $h : A \cup B \to A' \cup B'$ を次のように定義する: 任意の $x \in A \cup B$ について,

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & (x \in A) \\ g(x) & (x \in B). \end{cases}$$

($A \cap B = \emptyset$ なので, $x \in A$ かつ $x \in B$ とはならないことにも注意する.) $x, x' \in A \cup B$, $h(x) = h(x')$ とする. $x \in A$ であれば, $h(x') = h(x) = f(x) \in B$ なので, $x' \in A$ でもある. (ここで $x' \in B$ であれば, $h(x') = g(x) \in B'$, したがって $h(x') \in B \cap B'$ となるが, $B \cap B' = \emptyset$ なのでこれはあり得ない.) よって, $f(x') = h(x') = h(x) = f(x)$ であるが, f は単射なので $x = x'$ となる. 同様にして, $x \in B$ のときには $x' \in B'$ でもあり, g の単射性から $x = x'$ であることもわかる. ゆえに, h は単射である. よって, $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = |A \cup B| \leq |A' \cup B'| = \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'$ が成り立つ.

(2) 写像 $h : A \times B \to A' \times B'$ を次のように定義する: 任意の $(a, b) \in A \times B$ について,

$$h(a, b) \overset{\text{def}}{=} (f(a), g(b)).$$

f, g が単射であることから h が単射であることはすぐに分かる. よって, $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = |A \times B| \leq |A' \times B'| = \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$ である.

(3) $f : A \to A'$ は単射なので, 第 2 巻『写像』定理 4.8(1) から f は左逆写像 $f' : A' \to A$ を持つ. (f' 自身は全射である.) 写像 $h : B^A \to B'^{A'}$ を $\pi \mapsto g \circ \pi \circ f'$ で定義する (下の図式を参照).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "h(\pi)"'] & B'. \end{tikzcd}$$

$\pi, \sigma \in B^A$, $h(\pi) = h(\sigma)$ とすると, $g \circ \pi \circ f' = g \circ \sigma \circ f'$ である. g は単射なので, 第 2 巻『写像』命題 4.6(1) から $\pi \circ f' = \sigma \circ f'$ であり, さらに f' は全射なので, 第 2 巻『写像』命題 4.6(2) から $\pi = \sigma$ である. ゆえに h は単射であり, $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} = |B^A| \le |B'^{A'}| = \mathfrak{n}'^{\mathfrak{m}'}$ が成り立つ. □

演習 2.10. $|A| = \mathfrak{m}$, $|B| = \mathfrak{n}$, $|C| = \mathfrak{p}$ となる任意の集合 A, B, C を考える.

(1) $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{n} \le \mathfrak{p}$ と仮定する. 演習 2.7(2) から $\mathfrak{m} \le \mathfrak{p}$ であるが, ここで $\mathfrak{m} \ne \mathfrak{p}$ であることを示す. $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ と仮定して, 全単射 $f : A \to C$ を選ぶ. $\mathfrak{n} \le \mathfrak{p}$ だから, 命題 2.10 から全射 $g : C \to B$ が存在する. f, g は共に全射なので, 合成 $g \circ f : A \to B$ も全射であり, 命題 2.10 から $\mathfrak{m} = |A| \ge |B| = \mathfrak{n}$ である. 定理 2.11 からこれは仮定 $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ と両立しないので, 矛盾である. ゆえに, $\mathfrak{m} \ne \mathfrak{p}$ である.

(2) も (1) と同様の議論で証明できるので詳細は省略する. □

演習 2.11. C_X は集合であると仮定する. $|C_X| < |Z|$ を満たす集合 Z を取る. (Z としては, 定理 2.15 から例えば C_X の冪集合を考えておけばよい.) 任意の $z \in Z$ について, 直積 $\phi(z) = X \times \{z\}$ は X と対等なので, $\phi(z) \in C_X$ である. これで写像 $\phi : Z \to C_X$ が定義される. $z, z' \in Z$, $z \ne z'$ ならば $X \times \{z\} \ne X \times \{z'\}$ だから, ϕ は単射であり, したがって $|Z| \le |C_X|$ である. しかし, これは Z の選び方に反する. □

演習 3.1. $2 \le \aleph_0$ だから, 演習 2.9(3) と命題 3.13 から $\aleph = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0}$ である. 一方で, 定理 2.15 から $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ なので, $\aleph_0^{\aleph_0} \le (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$ である. ゆえに, 定理 2.11 から $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$ である. □

演習 3.2. $1 \le \mathfrak{n} \le \aleph_0$ のとき, 演習 2.9(3) から $\aleph = \aleph^1 \le \aleph^{\mathfrak{n}} \le \aleph^{\aleph_0}$ である. ここで, 指数法則 (演習 2.5) および命題 3.13 から $\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$ であるから, 主張が従う. □

演習 3.3. 演習 2.9(3) および定理 2.15 から, $\aleph^{\aleph} \ge 2^{\aleph} > \aleph$ である. □

演習 3.4. $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $X_i = X \times \{i\}$ $(1 \le i \le n)$ とおく. 式 (10) から, $n|X| = |X|$ である. よって, $|X \times I| = n|X| = |X|$ であり, 全単射 $f : X \times I \to X$ が存在する. $E_i = f(X_i) = \{f(x, i) \mid x \in X\}$ $(1 \le i \le n)$ とおく. $X \times I$ は X_i らの和集合であり, f は全射だから, $X = f(X \times I) = \bigcup_{i=1}^n f(X_i) = \bigcup_{i=1}^n E_i$ である. $X_1, X_2, \dots, X_n$ らは互いに交わらず, かつ f は単射なので, $i \ne j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ である. f は単射なので, $|X| = |X_i| = |f(X_i)| = |E_i|$ $(1 \le i \le n)$ である. □

演習 4.1. $\alpha \in \alpha = \operatorname{ord}\alpha$ とすると, ある $x \in \alpha$ を用いて $\alpha = \operatorname{ord}(\alpha, x) = \operatorname{ord}\alpha(x)$ と書ける. (最後の等号は式 (12) による.) よって, 命題 4.2 および命題 4.3 から $\alpha \simeq \alpha(x)$ となって, 第 4 巻『順序関係』補題 3.27 に反する. ゆえに, $\alpha \ne \alpha$ である. □

演習 4.2. (I) $\beta = \alpha - 1$ とする. 直前順序数の定義から, $\beta < \alpha$ である. β よりも真に大きな任意の順序数 γ を考える. 命題 4.6 から, $\alpha \le \gamma$ または $\alpha > \gamma$ である. 後者の場合は, $\beta < \gamma < \alpha$ であるが, これは $\beta = \alpha - 1$ に反するのであり得ない. よって, $\alpha \le \gamma$ である. ゆえに, α は β より真に大きな順序数のうちで最小であり, $\alpha = \beta + 1$ が成り立つ.

(II) $\alpha = \beta + 1$ と仮定する. 直後順序数の定義から, $\beta < \alpha$ である. α より真に小さな任意の順序数 γ を考える. 命題 4.6 から, $\beta \ge \gamma$ または $\beta < \gamma$ である. 後者の場合は $\beta < \gamma < \alpha$ であるが, これは $\alpha = \beta + 1$ に反するのであり得ない. よって, $\beta \ge \gamma$ である. ゆえに, β は α より真に小さな順序数のうちで最大であり, $\beta = \alpha - 1$ である. □

演習 4.3.　α が最大元 β を持っていると仮定する．$\beta \in \alpha$ だから, 命題 4.7 から $\beta < \alpha$ である．γ を α より真に小さい順序数とすると, 命題 4.7 から $\gamma \in \alpha$ であるが, $\beta = \max \alpha$ だから $\gamma \leq \beta$ である．よって, β は α より真に小さい最大の順序数, すなわち α の直前である．ゆえに, α は極限順序数ではない．これの対偶から, α が極限順序数ならば, α は最大元を持たない．

α が極限順序数ではないと仮定して, β をその直前とする．$\beta < \alpha$ だから, 命題 4.7 から $\beta \in \alpha$ である．任意の $\gamma \in \alpha$ について, 命題 4.7 から $\gamma < \alpha$ であるが, β は α の直前だから $\gamma \leq \beta$ である．したがって, $\beta = \max \alpha$ である．これの対偶から, α が最大元を持たないならば, α は極限順序数である．□

演習 4.4.　(1) 命題 4.15(2) から, $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha+\beta > \alpha+\gamma$ である．これの対偶から, $\alpha+\beta \leq \alpha+\gamma \Rightarrow \beta \leq \gamma$ である．

(2) $\alpha+\beta = \alpha+\gamma$ とすると, $\alpha+\beta \leq \alpha+\gamma$ でもあるから, (1) から $\beta \leq \gamma$ である．同じく, $\alpha+\beta \geq \alpha+\gamma$ でもあるから $\beta \geq \gamma$ である．よって, $\beta = \gamma$ である．□

演習 4.5.　(1) $\alpha \leq \beta$ とする．$\beta = \alpha + \gamma$ を満たす順序数 γ が存在することは補題 4.13(5) から分かる．そして, γ の一意性は演習 4.4(2) から従う．

(2) $\alpha < \beta$ とすると, (1) から $\alpha + \gamma = \beta$ を満たす順序数 γ が存在するが, $\alpha \neq \beta$ だから $\gamma > 0$ である．逆に, $\alpha+\gamma = \beta$ を満たす順序数 $\gamma > 0$ が存在すると仮定すると, 命題 4.15(2) から $\alpha = \alpha+0 < \alpha+\gamma = \beta$ である．□

演習 4.6.　(1) $\alpha + \beta$ が極限順序数でないならば, 演習 4.3 から $\alpha \oplus \beta$ は最大元 y を持つが, それは β の最大元でもあるから, 再び演習 4.3 から β は極限順序数ではない．これの対偶から, β が極限順序数である限り, $\alpha + \beta$ も極限順序数である．

(2) $P = \{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$ とおく．命題 4.15(2) から $\gamma < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \alpha + \beta$ であるから, $\alpha + \beta$ は P の上界である．$\alpha + \beta$ より真に小さな任意の順序数 δ を考える．β は極限順序数だから $0 < \beta$ であり, したがって $\alpha = \alpha + 0 \in P$ である．よって, もし $\delta < \alpha$ であれば, δ は P の上界ではない．$\delta \geq \alpha$ とする．演習 4.5 から, $\alpha + \varepsilon = \delta$ を満たす順序数 ε が存在する．$\alpha + \varepsilon = \delta < \alpha + \beta$ だから, 命題 4.15(2) から $\varepsilon < \beta$ である．β は極限順序数だから, その直前は存在せず, したがって $\varepsilon < \gamma < \beta$ となる順序数 γ が存在する．$\gamma < \beta$ だから, $\alpha + \gamma \in P$ である．$\varepsilon < \gamma$ なので, 命題 4.15(2) から $\delta = \alpha + \varepsilon < \alpha + \gamma$ である．よって, δ は P の上界ではない．これの対偶から, δ が P の上界ならば $\delta \geq \alpha + \beta$ である．ゆえに, $\alpha + \beta$ は P の最小の上界であり, $\alpha + \beta = \sup P$ が成り立つ．□

演習 4.7.　α の n 個のコピー $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を用意する．$\alpha + \alpha + \cdots + \alpha$ は連接 $X = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n$ が定める順序数である．一方, αn は $Y = \alpha \times \{1, 2, \ldots, n\}$ が定める順序数である．任意の $x \in X$ について, x は唯一つのコピー α_i $(1 \leq i \leq n)$ に属しているが, このとき $f(x) = (x, i) \in Y$ と定める．これで写像 $f : X \to Y$ が決まるが, これは順序集合としての同型写像であり, したがって $\alpha + \alpha + \cdots + \alpha = \alpha n$ である．□

演習 4.8.　$\alpha = \omega$, $\beta = \gamma = 1$ とするとき, $(\beta + \gamma)\alpha = 2\omega$, $\beta\alpha + \gamma\alpha = \omega + \omega$ である．演習 4.7 の補足で述べたように, $\omega + \omega \neq 2\omega$ だから, $(\beta + \gamma)\alpha \neq \beta\alpha + \gamma\alpha$ である．□

演習 4.9.　(1) $\beta = \gamma$ ならば $\beta\alpha = \gamma\alpha$ である．$\beta < \gamma$ とする．β は γ の切片だから, 特に $\beta \subseteq \gamma$ であり, したがって $\beta \times \alpha \subseteq \gamma \times \alpha$ である．(そしてさらに, $\beta \times \alpha$ 上の辞書式順序は $\gamma \times \alpha$ 上での辞書式順序と同じものである.) よって, 命題 4.8 から $\beta\alpha = \mathrm{ord}(\beta \times \alpha) \leq \mathrm{ord}(\gamma \times \alpha) = \gamma\alpha$ である．

(2) 2ω は直積 $\{0,1\}\times\mathbb{N}$ が定める順序数であるが, 例 4.17 で見たように $2\omega=\omega$ である．一方, $1\omega=\omega$ でもある．よって, $\alpha>0$ かつ $\beta\alpha=\gamma\alpha$ ならば $\beta=\gamma$ であるとは限らない． □

演習 4.10.　(1) $\alpha\beta$ が極限順序数ではないと仮定する．α は仮定から 0 ではないし, β は極限順序数だから 0 ではなく, したがって $\alpha\beta\neq 0$ である．よって, $\alpha\beta$ の直前にある順序数 λ が存在する．演習 4.2 から, $\lambda+1=\alpha\beta$ である．定理 4.19 から, $\lambda=\alpha\delta+\gamma$, $\gamma<\alpha$ と分解できる．$\alpha\delta\leq\alpha\delta+\gamma=\lambda<\lambda+1=\alpha\beta$ なので, 命題 4.18(2) から $\delta<\beta$ である．β 未満の任意の順序数 ε を考える．命題 4.18(2) から, $\alpha\varepsilon<\alpha\beta$ であるが, λ は $\alpha\beta$ の直前なので, $\alpha\varepsilon\leq\lambda=\alpha\delta+\gamma<\alpha\delta+\alpha=\alpha(\delta+1)$ である．(2 つ目の不等号 $<$ は $\gamma<\alpha$ と命題 4.15(2) から, 最後の等号は左分配則から, それぞれ成り立つ.) よって, 命題 4.18(2) から $\varepsilon<\delta+1$, すなわち $\varepsilon\leq\delta$ が成り立つ．ゆえに, δ は β 未満で最大の順序数, すなわち β の直前である．しかし, これは β が極限順序数であることからあり得ない．したがって, $\alpha\beta$ は極限順序数である．

(2) $P=\{\alpha\gamma\mid\gamma<\beta\}$ とおく．命題 4.18(2) から, $\alpha\beta$ は P の上界である．P の任意の上界 λ を考える．定理 4.19 から, $\lambda=\alpha\delta+\varepsilon$, $\varepsilon<\alpha$ と表せる．左分配則と命題 4.15(2) を使えば, $\alpha(\delta+1)=\alpha\delta+\alpha>\alpha\delta+\varepsilon=\lambda$ を得る．ここで, λ は P の上界なので, $\alpha(\delta+1)\notin P$ であり, したがって $\delta+1\geq\beta$ である．$\delta<\beta$ とすると, $\delta+1\leq\beta$ だから, $\delta+1=\beta$ であるが, β は極限順序数なのでこれはあり得ない．よって, $\delta\geq\beta$ であり, $\lambda=\alpha\delta+\varepsilon\geq\alpha\delta\geq\alpha\beta$ が成り立つ．したがって, $\alpha\beta$ は P の最小の上界であり, $\alpha\beta=\sup P$ である． □

演習 4.11.　(I) $\alpha+\beta=\beta$ ならば, $\alpha\omega\leq\beta$ であることを示す．$\alpha=0$ ならば明らかなので, $\alpha>0$ と仮定しておいてよい．任意の自然数 n について, $\alpha+\beta=\beta$ を繰り返して使えば,

$$\begin{aligned}\beta&=\alpha+\beta\\&=\alpha+\alpha+\beta\\&=\alpha+\alpha+\alpha+\beta\\&=\cdots\\&=\overbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}^{n\text{ 個}}+\beta\\&=\alpha n+\beta\end{aligned}$$

を得る．ここで, 最後の等号は演習 4.7 による．よって, $\alpha n\leq\alpha n+\beta=\beta$ である．したがって, β は集合 $P=\{\alpha n\mid n<\omega\}$ の上界である．$\alpha>0$ であり, ω は極限順序数だから, 演習 4.10 から $\alpha\omega=\sup P$ である．よって, $\alpha\omega\leq\beta$ である．

(II) 逆に, $\alpha\omega\leq\beta$ ならば, 演習 4.5(1) から $\beta=\alpha\omega+\delta$ を満たす順序数 δ が存在するので, 左分配則と $1+\omega=\omega$ を使って

$$\alpha+\beta=\alpha+\alpha\omega+\delta=\alpha(1+\omega)+\delta=\alpha\omega+\delta=\beta$$

を得る． □